●۱- یک پرتاب کنندهٔ ماهر بیسبال می‌تواند توپ بیسبال را با تندی ۸۵ mi/h و با چرخش ۱۸۰۰ rev/min به طرف محوطهٔ ضربه زدن پرتاب کند. این توپ چند دور می‌چرخد تا به محوطهٔ ضربه زدن برسد؟ برای سادگی فرض کنید که طول مسیر ۶۰ فوت و به صورت یک خط راست باشد.

حل:

$\omega = 1800\,\text{rev/min} = 30\,\text{rev/s}$

از حرکت انتقالی داریم: $x = vt \Rightarrow t = \dfrac{x}{v}$

$t = \dfrac{60\,\text{ft}}{85\,(\text{mi/h})} = 0/48\,\text{s}$

$\theta = \omega t = 30 \times 0/48 = 14/4\,\text{rev}$

●۲- تندی زاویه‌ای (الف) عقربهٔ ثانیه شمار، (ب) عقربهٔ دقیقه شمار و (پ) عقربه ساعت شمار یک ساعت را که به طور یکنواخت کار می‌کند به دست آورید. پاسخ خود را برحسب رادیان بر ثانیه بنویسید.

حل: (الف) برای ثانیه شمار داریم:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{60} = 1/05 \times 10^{-1}\ \text{rad/s}$$

(ب) برای دقیقه شمار داریم:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{60 \times 60} = 1/74 \times 10^{-3}\ \text{rad/s}$$

(پ) برای ساعت شمار داریم:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{12 \times 60 \times 60} = 1/45 \times 10^{-4}\ \text{rad/s}$$

ساعت شمار، 2π را در ۱۲ ساعت طی می‌کند.

●●۳- یک شیرجه رونده در فاصلهٔ بین سکوی شیرجه و سطح آب که ۱۰ متر است ۲/۵ دور می‌زند. اگر مؤلفهٔ قائم سرعت اولیه صفر باشد، سرعت زاویه‌ای میانگین شیرجه رونده را حساب کنید. **ILW**

حل: ابتدا زمان سقوط را حساب می‌کنیم:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 10}{9/8}} = 1/43\,\text{s}$$

سرعت زاویه میانگین را می‌یابیم:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2/5 \times 2\pi}{1/43} = 11/21\ \text{rad/s}$$

●●۴- مکان زاویه‌ای نقطه‌ای روی لبهٔ یک چرخ دوار با رابطهٔ $\theta = 4/0t - 3/0t^2 + t^3$ داده می‌شود که θ برحسب رادیان و t برحسب ثانیه است. سرعت زاویه‌ای این نقطه در زمانهای (الف) $t = 2/0\,\text{s}$ و (ب) $t = 4/0\,\text{s}$ چقدر است؟ (پ) شتاب زاویه‌ای میانگین برای بازهٔ زمانی که از $t = 2/0\,\text{s}$ شروع و در $t = 4/0\,\text{s}$ پایان می‌یابد چقدر است؟ شتابهای زاویه‌ای لحظه‌ای در (پ) شروع و (ت) پایان این بازهٔ زمانی چقدر است؟

حل: (الف) از تعریف سرعت زاویه‌ای داریم:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 4 - 6t + 3t^2$$

$\omega(t=2) = 4 - 6 \times 2 + 3\,(2)^2 = 4\,\text{rad/s}$

(ب) $\omega(t=4) = 4 - 6 \times 4 + 3\,(4)^2 = 28\,\text{rad/s}$

(پ) از تعریف شتاب زاویه‌ای میانگین داریم:

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{28 - 4}{4 - 2} = 12\,\text{rad/s}^2$$

(ت) از تعریف شتاب زاویه‌ای داریم:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$\alpha = -6 + 6t$

$\alpha(t=2) = -6 + 6 \times 2 = 6\,\text{rad/s}^2$

(ث) $\alpha(t=4) = -6 + 6 \times 4 = 18\,\text{rad/s}^2$

●●۵- هرگاه به لبهٔ کناری برشی از نان برشتهٔ کره زده شده ناگهان فشاری وارد شود، موقع سقوط می‌چرخد. اگر فاصله تا کف اتاق ۷۶cm و چرخش کمتر از ۱ rev باشد، (الف) کوچکترین و (ب) بزرگترین تندیهای زاویه‌ای که موجب می‌شود تا نان پس از اصابت به زمین واژگون شود و قسمت کره‌دار آن در پایین قرار گیرد چقدر است؟ [redacted]

حل: (الف)

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 0/76}{9/8}} = 0/394\,\text{s}$$

$\theta = \pi$

و $\theta = \omega t \Rightarrow \omega = \dfrac{\theta}{t}$

$= \dfrac{3/14}{0/394} = 7/97\,\text{rad/s}$

(ب) $\theta = 2\pi \Rightarrow \omega = \dfrac{2(3/14)}{0/394} = 15/94\,\text{rad/s}$

●●۶- مکان زاویه‌ای نقطه‌ای روی یک چرخ دوار با رابطهٔ $\theta = 2/0 + 4/0t^2 + 2/0t^3$ داده می‌شود که θ برحسب رادیان و t برحسب ثانیه است. در لحظهٔ $t = 0$، (الف) مکان زاویه‌ای این نقطه و (ب) سرعت زاویه‌ای آن چقدر است؟ (پ) سرعت زاویه‌ای نقطه در $t = 4/0\,\text{s}$ چقدر است؟ (ت) شتاب زاویه‌ای نقطه را در $t = 2/0\,\text{s}$ حساب کنید. (ث) آیا شتاب زاویه‌ای آن ثابت است؟

حل: (الف) $\theta(t=0) = 2\,\text{rad}$

(ب) از این پس قرارداد می‌کنیم $\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ و $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$

$\omega = \dot{\theta} = 8t + 6t^2$

$\omega(t=0) = 0\ \text{rad/s}$

(پ) $\omega(t=4) = 8 \times 4 + 6 \times (4)^2 = 128\ \text{rad/s}$

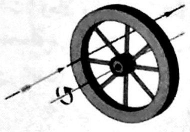
(ت) $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$

$\alpha = 8 + 12t$

$\alpha(t=2) = 8 + 12 \times 2 = 32\,\text{rad/s}^2$

(ث) خیر، چون با زمان تغییر می‌کند.

●●●۷- چرخ نشان داده شده در شکل ۱۰-۳۰ دارای هشت پره با فاصله‌های مساوی و شعاع ۳۰cm است. این چرخ روی محور ثابتی قرار دارد و با تندی ۲/۵ rev/s می‌چرخد. می‌خواهیم پیکانی به طول ۲۰cm را موازی با محور چرخش طوری پرتاب کنیم که بدون برخورد با هیچ کدام از پره‌ها از چرخ بگذرد. فرض کنید که پیکان و پره‌ها بسیار باریک‌اند. (الف) کمینهٔ تندی پیکان چقدر باید باشد؟ (ب) آیا مهم است که چه نقطه‌ای در فاصلهٔ میان محور و کنارهٔ چرخ هدف گرفته شود؟ اگر چنین است بهترین مکان آن کجاست؟



شکل ۱۰-۳۰ مسئلهٔ ۷

حل: (الف) ابتدا سرعت زاویه را محاسبه می‌کنیم:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2/5 \times 2\pi}{1} = 15/7\,\text{rad/s}$$

سپس محاسبه می‌کنیم چه مدت زمانی طول می‌کشد تا چرخ به اندازهٔ $\dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$ بچرخد.

$$t = \frac{\theta}{\omega} \Rightarrow t = \frac{\frac{\pi}{4}}{15/7} = 0/05\,\text{s}$$

نیزه پرتاب شده، در همین زمان باید از میان پره‌ها عبور کنند. پس

$$v_{\min} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0/2}{0/05} = 4\,\text{m/s}$$

(ب) خیر، محل هدف‌گیری اهمیتی ندارد.

●●●۸- شتاب زاویه‌ای چرخی عبارت است از $\alpha = 6/0t^4 - 4/0t^2$ که در آن α برحسب رادیان بر مجذور ثانیه و t برحسب ثانیه است. در لحظهٔ $t = 0$ چرخ دارای سرعت زاویه‌ای $+2/0\,\text{rad/s}$ و مکان زاویه‌ای $+1\ \text{rad}$ است. عبارتی برای (الف) سرعت زاویه‌ای (rad/s) و (ب) مکان زاویه‌ای (rad) به صورت تابعی از زمان (s) بنویسید.

حل: (الف) از تعریف شتاب زاویه‌ای داریم:

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$$

باید از رابطه انتگرال گرفته شود.

$$d\omega = \alpha\,dt \Rightarrow \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega = \int_{t_1}^{t_2} \alpha\,dt$$

$$\int_2^{\omega} d\omega = \int_0^t (6t^4 - 4t^2)\,dt = \frac{6}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3$$

$$\omega - 2 = \frac{6}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3 \Rightarrow \omega = \frac{6}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3 + 2$$

(ب) از تعریف سرعت زاویه‌ای داریم:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega\,dt$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_{t_1}^{t_2} \omega\,dt$$

$$\int_1^{\theta} d\theta = \int_0^t \left(\frac{6}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3 + 2\right)dt$$

$$\theta - 1 = \frac{1}{5}t^6 - \frac{1}{3}t^4 + 2t$$

$$\theta = \frac{t^6}{5} - \frac{t^4}{3} + 2t + 1$$

●۹- قرصی که در ابتدا با ۱۲۰rad/s می‌چرخد با شتاب زاویه‌ای ثابتی به بزرگی ۴۰rad/s² کند می‌شود. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا این قرص متوقف شود؟ (ب) در طول این زمان قرص چه زاویه‌ای چرخیده است؟

حل: (الف)

$\omega = \alpha t + \omega_0$

$\alpha = -4\,\text{rad/s}^2$

$$\omega = 0 \Rightarrow t = \frac{-\omega_0}{\alpha} = \frac{-120}{-4} = 30\,\text{s}$$

(ب) برای زاویه داریم: (رابطهٔ مستقل از زمان)

$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$

$$\Delta\theta = \frac{-\omega_0^2}{2\alpha} = \frac{-(120)^2}{-2 \times 4} = 1800\,\text{rad}$$

●۱۰- تندی زاویه‌ای موتور اتومبیلی با آهنگ ثابت از ۱۲۰۰ rev/min به ۳۰۰۰rev/min در ۱۲s افزایش می‌یابد. (الف) شتاب زاویه‌ای این حرکت چند دور بر مجذور دقیقه است؟ (ب) در طی این بازهٔ ۱۲s این موتور چند دور می‌چرخد؟

حل: (الف) از تعریف شتاب زاویه‌ای داریم:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{3000 - 1200}{\frac{12}{60}} = 9000\,\text{rev/min}^2$$

(ب) از رابطهٔ مستقل از زمان داریم:

$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$

$$\Delta\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha}$$

$$\Delta\theta = \frac{(3000)^2 - (1200)^2}{2 \times 9000} = 420\,\text{rev}$$

●۱۱- استوانه‌ای به دور محور مرکزی خود با سرعت زاویه‌ای ۱۲/۶ rad/s می‌چرخد. اگر این استوانه بعداً با آهنگ ثابت ۴/۲۰rad/s² کند شود (الف) در چه مدتی و (ب) در طی چه زاویه‌ای از چرخش به حالت سکون می‌رسد؟

حل: (الف) برای سرعت داریم:

$\alpha = -4/2\,\text{rad/s}^2$

$\omega = \alpha t + \omega_0$

$$0 = \alpha t + \omega_0 \Rightarrow t = -\frac{\omega_0}{\alpha} = -\frac{12.6}{-4.2} = 3\,s$$

(ب)
$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t$$
$$\theta = \frac{1}{2}(-4.2)(3)^2 + (12.6)(3) = 18.9\,rad$$

۱۲•- قرصی از حالت سکون حول محور مرکزی خود با شتاب زاویه‌ای ثابت شروع به چرخش می‌کند. قرص در مدت ۵/۰s به اندازهٔ ۲۵ rad می‌چرخد. در این مدت، بزرگی (الف) شتاب زاویه‌ای و (ب) سرعت زاویه‌ای میانگین قرص چقدر است؟ (پ) سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای این قرص در انتهای ۵/۰s چقدر است؟ (ت) اگر شتاب زاویه‌ای تغییر نکند، کل زاویهٔ طی شده توسط قرص در طی ۵/۰s بعدی چقدر است؟

حل: (الف)
$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow \alpha = \frac{2\theta}{t^2} = \frac{2\times(25)}{(5)^2} = 2\,rad/s^2$$

(ب)
$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{25}{5} = 5\,rad/s$$

(پ)
$$\omega = at + \omega_0 \qquad \omega_0 = 0$$
$$\omega = \alpha t \qquad \omega(t=5) = 2\times 5 = 10\,rad/s$$

(ت)
$$\omega(t=10\,s) = 2\times 10 = 20\,rad/s$$
$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$$
$$\Delta\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} = \frac{(20)^2 - (10)^2}{2\times 2} = 75\,rad$$

۱۳••- چرخی دارای شتاب زاویه‌ای ثابت ۳/۰ rad/s^2 است. در طی یک بازهٔ زمانی معین ۴/۰ s این چرخ به اندازهٔ زاویهٔ ۱۲۰rad می‌چرخد. با فرض اینکه چرخ از حال سکون شروع به حرکت کند، چه مدت قبل از شروع این بازهٔ زمانی ۴/۰s چرخ در حرکت بوده است؟ **SSM**

حل:
$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t \Rightarrow 120 = \frac{1}{2}\times 3(4)^2 + \omega_0\times 4$$
$$\Rightarrow \omega_0 = 24\,rad/s$$
$$\omega_0 = \alpha t \Rightarrow t = \frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{24}{3} = 8\,s$$

فرض کردیم، سرعت اولیهٔ چرخ ω_0 است و در رابطهٔ مربوط به زاویه قرار دادیم. سپس با استفاده از شتاب، مدت زمان چرخش تا رسیدن به سرعت ω_0 را تعیین کردیم.

۱۴••- چرخ و فلکی از حال سکون با شتاب زاویه‌ای ۱/۵۰ rad/s^2 شروع به چرخش می‌کند؟ (الف) دو دور اول، و (ب) دو دور بعدی چقدر طول می‌کشد؟

حل: (الف)
$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2\Delta\theta}{\alpha} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\times(2)\times 2\pi}{1.5}} = 4.09\,s$$

(ب) سرعت زاویه‌ای بعد از ۴ ثانیه را می‌یابیم.
$$\omega_0 = \alpha t \Rightarrow \omega_0 = 1.5\times 4.09 = 6.14\,rad/s$$

سپس جابه‌جایی از لحظهٔ $t = 4.09\,s$ را در نظر می‌گیریم.
$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t$$
$$2(2\pi) = \frac{1}{2}\times 1.5(t^2) + 6.14t$$
$$t = 1.7\,s$$

۱۵••- چرخ لنگری در لحظهٔ $t = 0$ دارای سرعت زاویه‌ای ۴/۷ rad/s ، شتاب زاویه‌ای ثابت $-0.25\,rad/s^2$ و خط مرجعی در $\theta_0 = 0$ است. (الف) زاویهٔ بیشینهٔ θ_{max}، که این خط مرجع به طرف مثبت می‌چرخد چقدر است؟ (ب) اولین و (پ) دومین زمانی که خط مرجع در $\theta = \frac{1}{2}\theta_{max}$ قرار می‌گیرد کدام است؟ در چه (ت) زمان منفی و (ث) زمان مثبتی خط مرجع به $\theta = -10.5\,rad$ می‌رسد؟ (ج) نمودار θ را برحسب t رسم کنید و پاسخهای (الف) تا (ث) را روی آن نشان دهید.

حل: (الف)
$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$$
$$\Delta\theta = \theta_{max} - 0$$
$$\theta_{max} = \frac{-\omega_0^2}{2\alpha} = \frac{-(4.7)^2}{-2\times 0.25} = 44.18\,rad$$

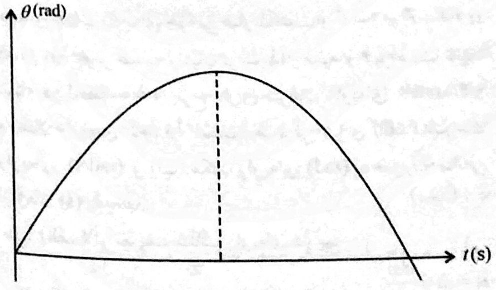
(ب) و (پ)
$$\theta = \frac{1}{2}at^2 + \omega_0 t \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}(-0.25)t^2 + (4.7)t$$
$$\frac{1}{2}(44.18) = \frac{1}{2}(-0.25)t^2 + 4.7t$$
$$t_1 = 5.50\,s \qquad t_2 = 32.09\,s$$

(ت) و (ث)
$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t$$
$$-10 = \frac{1}{2}(-0.25)t^2 + 4.7t$$

زمان منفی $t_1 = -2.02$

زمان مثبت $t_2 = 39.62$

(ج)



۱۶••- قرصی حول محور مرکزی خود از حال سکون شروع به چرخش می‌کند و با شتاب زاویه‌ای ثابت شتاب می‌گیرد. در یک لحظه قرص با تندی زاویه‌ای ۱۰rev/s می‌چرخد؛ پس از ۶۰ دور بعدی تندی زاویه‌ای آن به ۱۵rev/s می‌رسد. مطلوب است تعیین (الف) شتاب زاویه‌ای، (ب) زمان لازم برای پیمودن ۶۰ دور کامل. (پ) زمان لازم برای رسیدن به تندی زاویه‌ای ۱۰rev/s و (ت) تعداد دورهایی که قرص از حالت سکون تا زمانی که به تندی زاویه‌ای ۱۰rev/s می‌رسد چرخیده است.

حل: (الف) از رابطهٔ مستقل از زمان داریم:
$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta \Rightarrow \alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\Delta\theta}$$
$$\alpha = \frac{(15)^2 - (10)^2}{2\times 60} = 1.04\,rev/s^2$$
$$\alpha = 1.04\times 2\pi = 6.54\,rad/s^2$$

(ب)
$$\omega = \alpha t + \omega_0 \Rightarrow t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}$$
$$t = \frac{15-10}{1.04} = 4.8\,s$$

(پ)
$$\omega = \alpha t + \omega_0$$
$$10 = 1.04t + 0 \Rightarrow t = \frac{10}{1.04} = 9.62\,s$$

(ت)
$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$$
$$\Delta\theta = \frac{\omega^2}{2\alpha} = \frac{100}{2\times 1.04} = 48.08\,rev$$

۱۷••- تندی زاویه‌ای چرخ لنگری در طی ۴۰rev از ۱/۵ rad/s به صفر می‌رسد. (الف) با فرض اینکه شتاب زاویه‌ای آن ثابت باشد، چه مدت طول می‌کشد تا چرخ متوقف شود؟ (ب) شتاب زاویه‌ای آن چقدر است؟ (پ) مدت زمان چرخیدن ۲۰ دور اول از ۴۰ دور چقدر است؟ **ILW**

حل: (الف) ابتدا شتاب زاویه‌ای را می‌یابیم.
$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$$
$$\alpha = \frac{-\omega_0^2}{2\Delta\theta} = -\frac{(1.5)^2}{2\times(40\times 2\pi)} = -4.48\times 10^{-3}\,rad/s^2$$

سپس زمان توقف را می‌یابیم:
$$\omega = \alpha t + \omega_0 \Rightarrow t = \frac{-\omega_0}{\alpha} = \frac{-1.5}{-4.48\times 10^{-3}} = 334.82\,s$$

(ب) در قسمت (الف) محاسبه شد.

(پ)
$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t$$
$$20\times(2\pi) = \frac{1}{2}(-4.48)t^2 + (1.5)t$$
$$t = 98.5\,s \quad \text{و} \quad t = 559\,s$$

از آنجا که در $t = 334.82\,s$ چرخ متوقف می‌شود. پس زمان قابل قبول $t = 98.5\,s$ است.

۱۸•- یک صفحهٔ گرامافون با چرخیدن این صفحه کار می‌کند، به طوری که سوزنی در داخل شیار تقریباً دایره‌ای شکل در صفحه می‌لغزد. برآمدگیهای درون شیار باعث می‌شود که سوزن حرکت کند و به نوسان درآید. دستگاه این نوسانها را به سیگنالهای الکتریکی و سپس به صوت تبدیل می‌کند. فرض

کنید که صفحه‌ای با آهنگ $33\frac{1}{3}$ rev/min می‌چرخد و شیار در شعاع ۱۰/۰cm است و برآمدگیهای درون شیار به طور یکنواخت به اندازهٔ ۱/۷۵ mm از هم فاصله دارند. با چه آهنگی (ضربه در ثانیه) این برآمدگیها با سوزن برخورد می‌کنند؟

حل:
$$\omega = 33\frac{1}{3}\,rev/min = 3.49\,rad/s$$

از رابطهٔ بین سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای داریم:
$$v = \omega r \Rightarrow v = 0.1\times 3.49 = 0.349\,m/s$$

اکنون از رابطهٔ جابه‌جایی خطی استفاده می‌کنیم.
$$x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v} = \frac{1.75\times 10^{-3}}{0.349} = 5\times 10^{-3}\,s$$

تعداد ضربه در ثانیه برابر است با $\frac{1}{t}$ یا ۲۰۰ .

۱۹•- بین سالهای ۱۹۱۱ تا ۱۹۹۰ نوک برج کج پیزا در ایتالیا با آهنگ متوسط ۱/۲ mm/y به طرف جنوب حرکت کرده است. ارتفاع این برج ۵۵ m است. تندی زاویه‌ای میانگین نوک این برج حول پایه‌اش برحسب رادیان بر ثانیه چقدر است؟

حل:
$$v = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}$$

سرعت خطی نوک برج را به m/s تبدیل می‌کنیم.
$$v = \frac{x}{t} = 1.2\,mm/y = \frac{1.2\times 10^{-3}}{24\times 365\times 3600} = 3.81\times 10^{-11}\,m/s$$

اکنون ω تندی زاویه‌ای میانگین را می‌یابیم:
$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{3.81\times 10^{-11}}{55} = 6.93\times 10^{-13}\,rad/s$$

۲۰•- فضانوردی در یک دستگاه مرکز گریز باید آزمایش شود. شعاع دستگاه ۱۰m است و در آغاز حرکت بنابر رابطهٔ $\theta = 0.30t^2$ می‌چرخد، که در آن t برحسب ثانیه و θ برحسب رادیان است. در لحظهٔ $t = 5.0\,s$ ، بزرگی (الف) سرعت زاویه‌ای، (ب) سرعت خطی، (پ) شتاب مماسی و (ت) شتاب شعاعی فضانورد چقدر است؟

حل: (الف)
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 0.6t$$
$$\omega(t=5) = 0.6(5) = 3\,rad/s$$

(ب)
$$V = R\omega = 10(3) = 30\,m/s$$

(پ)
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0.6$$

شتاب مماسی برابر است با:
$$a_T = R_\alpha = 10\times 0.6 = 6\,m/s^2$$

(ت) شتاب شعاعی برابر است با:
$$a_R = \frac{V^2}{R} = \frac{(30)^2}{10} = 90\,m/s^2$$

۲۱•- چرخ لنگری به قطر $۱/۲۰\text{m}$ در حال چرخش با تندی زاویه‌ای ۲۰۰rev/min است. (الف) تندی زاویه‌ای این چرخ لنگر برحسب رادیان بر ثانیه چقدر است؟ (ب) تندی خطی نقطه‌ای روی لبهٔ چرخ چقدر است؟ (پ) چه شتاب زاویه‌ای ثابتی (برحسب دور بر مجذور دقیقه) باعث افزایش تندی زاویه‌ای چرخ به مقدار ۱۰۰۰rev/min در مدت $۶۰/۰\text{s}$ می‌شود؟ (ت) چرخ در طی این $۶۰/۰\text{s}$ چند دور می‌زند؟
WWW SSM

حل: (الف)

$$\omega = ۲۰۰\frac{\text{rev}}{\text{min}} = \frac{۲۰۰\times ۲\pi}{۶۰} = ۲۰/۹۳\ \text{rad/s}$$

(ب)

$$V = \omega R = ۲۰/۹۳(۱/۲) = ۲۵/۱۱۶\ \text{m/s}$$

(پ)

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{۱۰۰-۲۰۰}{۱} = ۸۰۰\ \text{rev/min}^۲$$

(ت)

$$\omega^۲ - \omega_۰^۲ = ۲\alpha\Delta\theta$$

$$\Delta\theta = \frac{(۱۰۰۰)^۲ - (۲۰۰)^۲}{۲(۸۰۰)} = ۶۰۰\ \text{rev}$$

۲۲•- اگر ملخ هواپیمایی با $۲۰۰۰\ \text{rev/min}$ در حالی که هواپیما با تندی ۴۸۰km/h نسبت به زمین حرکت می‌کند بچرخد، تندی خطی نقطه‌ای روی نوک این ملخ در شعاع $۱/۵\ \text{m}$ نسبت به (الف) خلبان و (ب) ناظری که روی زمین قرار دارد چقدر است؟ سرعت هواپیما موازی با محور چرخش است.

حل: (الف) خلبان فقط دوران ملخ را می‌بینند:

$$v = \omega r \Rightarrow v = ۲۰۰۰\times\frac{۲\pi}{۶۰}\times ۱/۵ = ۳۱۴/۱۶\ \text{m/s}$$

(ب)

$$v_۱ = ۴۸۰\frac{\text{km}}{\text{h}} = ۱۳۳/۳\ \text{m/s}$$

ناظر زمین سرعت انتقالی ملخ و سرعت‌لبهٔ ملخ را می‌بینند. این دو سرعت بر هم عمود هستند پس تندی نهایی برابر است با:

$$v = \sqrt{(v_۱)^۲ + (v_۲)^۲}$$

$v_۱$ سرعت انتقالی و $v_۲$ سرعت لبهٔ ملخ است.

$$v = \sqrt{(۱۳۳/۳)^۲ + (۳۱۴/۱۶)^۲} = ۳۴۱/۲۸\ \text{m/s}$$

۲۳•- بزرگی (الف) سرعت زاویه‌ای، (ب) شتاب شعاعی و (پ) شتاب مماسی فضا پیمایی که در مسیری دایره‌ای به شعاع ۳۲۲۰km و با تندی ۲۹۰۰۰km/h می‌چرخد چقدر است؟

حل: (الف)

$$V = ۲۹۰۰۰\ \text{km/h} = ۸۰۵۵/۵\ \text{m/s}$$

$$V = R\omega \Rightarrow \omega = \frac{V}{R} = \frac{۸۰۵۵/۵}{۳/۲۲\times ۱۰^۶} = ۲/۵\times ۱۰^{-۳}\ \text{rad/s}$$

(ب)

$$a_R = R\omega^۲ = (۳/۲۲\times ۱۰^۶)(۲/۵\times ۱۰^{-۳})^۲ = ۲۰/۲\ \text{m/s}^۲$$

(پ)

$$a_T = R\alpha$$

چون ω ثابت است، پس $\alpha = ۰$ و $a_T = ۰$ است.

۲۴•- جسمی حول محور ثابتی می‌چرخد به طوری که مکان زاویه‌ای یک خط مرجع روی جسم با رابطهٔ $\theta = ۰/۴e^{۲t}$ داده می‌شود که در آن θ برحسب رادیان و t برحسب ثانیه است. نقطه‌ای را روی جسم در نظر بگیرید که در فاصلهٔ $۴/۰\text{cm}$ از محور چرخش قرار دارد. در لحظهٔ $t = ۰$ بزرگی (الف) مؤلفهٔ مماسی شتاب و (ب) مؤلفهٔ شعاعی شتاب نقطه چقدر است؟

حل: (الف)

$$\alpha = \frac{d^۲\theta}{dt^۲} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(۰/۸e^{۲t}) = ۱/۶e^{۲t}$$

$$\alpha(t=۰) = ۱/۶\ \text{rad/s}^۲$$

$$a_T = r\alpha = (۰/۰۴)(۱/۶) = ۰/۰۶۴\ \text{m/s}^۲$$

(ب)

$$a_R = r\omega^۲ = ۰/۰۴(۰/۸)^۲ = ۰/۰۲۵۶\ \text{m/s}^۲$$

۲۵••- قرصی با شعاع $۰/۲۵\text{m}$ همانند یک چرخ و فلک به اندازهٔ ۸۰۰rad می‌چرخد. حرکت از حال سکون شروع می‌شود و در طی ۴۰۰rad نخست به یک تندی زاویه‌ای با آهنگ ثابت $\alpha_۱$ می‌رسد و سپس تندی زاویه‌ای خود را با آهنگ ثابت $-\alpha_۱$ از دست می‌دهد تا دوباره به سکون برسد. بزرگی شتاب مرکزگرای هر قسمت قرص از $۴۰۰\text{m/s}^۲$ تجاوز نمی‌کند. (الف) کمترین زمان لازم برای این چرخش چقدر است؟ (ب) مقدار متناظر $\alpha_۱$ چقدر است؟

حل: (الف) کمترین زمان لازم برای چرخش را با کمک بیشینه‌ی شتاب می‌یابیم:

$$a_R = r\omega^۲ \Rightarrow \omega^۲ = \frac{a_r}{r} = \frac{۴۰۰}{۰/۲۵} = ۱۶۰۰ \Rightarrow \omega = ۴۰\ \text{rad/s}$$

اکنون از رابطه‌ی جابجایی زاویه‌ای میانگین داریم:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{۱}{۲}(\omega + \omega_۰)\ ,\ \omega_۰ = ۰$$

$$\Delta t = \frac{۲\Delta\theta}{\omega} = \frac{(۲)(۴۰۰)}{۴۰} = ۲۰\text{s}$$

زمان قسمت دوم حرکت نیرو از روی تقارن ۲۰s است. پس کمترین زمان لازم برای حرکت ۴۰s است.

(ب)

$$\Delta\theta = \frac{۱}{۲}\alpha_۱(\Delta t)^۲ + \omega_۰\Delta t \Rightarrow \alpha_۱ = \frac{۲(۴۰۰)}{۴۰۰} = ۲\ \text{rad/s}^۲$$

۲۶••- چرخ لنگری به شعاع $۲/۸۳\ \text{cm}$ را از حال سکون با شتاب $۱۴/۲\ \text{rad/s}^۲$ به حرکت در می‌آوریم تا تندی زاویه‌ای آن به ۲۷۶۰rev/min برسد. (الف) شتاب مماسی نقطه‌ای روی کنارهٔ این چرخ را در طی فرایند شتاب گرفتن به دست آورید. (ب) شتاب شعاعی این نقطه وقتی این چرخ لنگر با تندی نهایی خود بچرخد چقدر است؟ (پ) در مدت شتاب گرفتن چرخ لنگر، نقطهٔ واقع بر کنارهٔ آن چه مسافتی را طی می‌کند؟

حل: (الف)

$$a_T = r\alpha = ۲/۸۳\times ۱۰^{-۲}\times ۱۴/۲ = ۰/۴۰۲\ \text{m/s}^۲$$

(ب) تندی نهایی برابر است با:

$$\omega = ۲۷۶۰\frac{\text{rev}}{\text{min}} = ۲۷۶۰\frac{\times ۲\pi}{۶۰} = ۲۸۸/۹\ \text{rad/s}$$

$$a_R = r\omega^۲ = ۲۳۶۲\ \text{m/s}^۲$$

$$S = R\Delta\theta$$

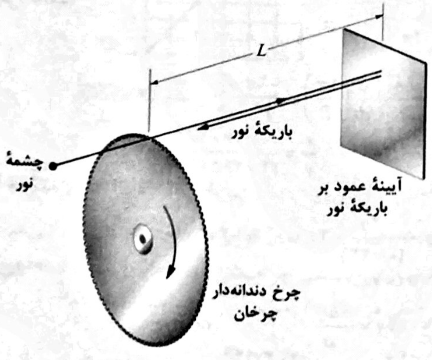
(پ)

$$\omega^۲ - \omega_۰^۲ = ۲\alpha\Delta\theta$$

$$\Delta\theta = \frac{\omega^۲}{۲\alpha} = \frac{(۲۸۸/۹)^۲}{۲\times ۱۴/۲} = ۲۹۳۸/۸\ \text{rad}$$

$$s = R\Delta\theta = ۲/۸\times ۱۰^{-۲}\times ۲۹۳۸/۸ = ۸۳/۱۷\ \text{m}$$

۲۷••- در یکی از روشهای اولیه برای اندازه‌گیری تندی نور، از یک چرخ دندانه‌دار چرخان استفاده شده است. در این روش، باریکه‌ای از نور که از شکاف میان دندانه‌های کنارهٔ خارجی چرخ، مطابق شکل ۱۰-۳۱ عبور می‌کند، به آینه‌ای که در فاصلهٔ دور قرار دارد می‌تابد و چنان به طرف چرخ بر می‌گردد که درست از شکاف بعدی چرخ عبور کند. شعاع چنین چرخ دندانه‌داری $۵/۰\text{cm}$ بود و در کنارهٔ آن ۵۰۰ دندانه وجود داشت. اندازه‌گیریهای مربوط به حالتی که فاصلهٔ آینه از چرخ $L = ۵۰۰\text{m}$ بوده تندی نور را $۳/۰\times ۱۰^۵\ \text{km/s}$ به دست داده است. (الف) تندی زاویه‌ای (ثابت) چرخ چقدر بوده است؟ (ب) تندی خطی یک نقطه روی لبه چرخ چقدر است؟



شکل ۱۰-۳۱ مسئلهٔ ۲۷

حل:

(الف) زمان رفت و برگشت نور برابر است با:

$$\Delta t = \frac{۲L}{C} = \frac{۲\times ۵۰۰}{۳\times ۱۰^۸} = ۳/۳۳\times ۱۰^{-۶}\ \text{s}$$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \Delta\theta = \frac{۲\pi}{۵۰۰} = ۱/۲۵۶\times ۱۰^{-۲}\ \text{rad}$$

$$\omega = \frac{۱/۲۵۶\times ۱۰^{-۲}}{۳/۳\times ۱۰^{-۶}} = ۳۷۷۲\ \text{rad/s}$$

(ب) تندی خطی برابر است با:

$$v = r\omega = ۰/۰۵\times ۳۷۷۲ = ۱۸۸/۶\ \text{m/s}$$

۲۸••- چرخ لنگر یک ماشین بخار با سرعت زاویه‌ای ثابت ۱۵۰rev/min می‌چرخد. وقتی بخار قطع شود، اصطکاک یاتاقانها و مقاومت هوا چرخ را پس از مدت ۲/۲ ساعت متوقف می‌کند. (الف) شتاب زاویه‌ای ثابت چرخ برحسب دور بر مجذور دقیقه در حین کند شدن حرکت چقدر است؟ (ب) چرخ قبل از توقف چند دور می‌چرخد؟ (پ) در لحظه‌ای که این چرخ لنگر با تندی زاویه‌ای $۷۵\ \text{rev/min}$ می‌چرخد مؤلفهٔ مماسی شتاب خطی نقطه‌ای از چرخ لنگر که به فاصلهٔ ۵۰cm از محور چرخش قرار دارد چقدر است؟ (ت) بزرگی شتاب خالص نقطهٔ ذکر شده در قسمت (پ) چقدر است؟

حل: (الف)

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\alpha = \frac{-۱۵۰}{۲/۲\times ۶۰} = -۱/۱۴\ \text{rev/min}^۲$$

(ب) از رابطهٔ مستقل از زمان استفاده می‌کنیم:

$$\omega^۲ - \omega_۰^۲ = ۲\alpha\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{-\omega_۰^۲}{۲\alpha}$$

$$\Delta\theta = \frac{-(۱۵۰)^۲}{-۲\times ۱/۱۴} = ۹۸۶۸/۴\ \text{rev}$$

(پ)

$$a_T = R\alpha = -۰/۵\times ۱/۱۴\times\frac{۲\pi}{(۶۰)^۲} = -۰/۹۹۴\times ۱۰^{-۳}\ \text{m/s}^۲$$

(ت)

$$a_R = r\omega^۲ = ۰/۵\left(۷۵\times\frac{۲\pi}{۶۰}\right)^۲ = ۳۰/۸۱\ \text{m/s}^۲$$

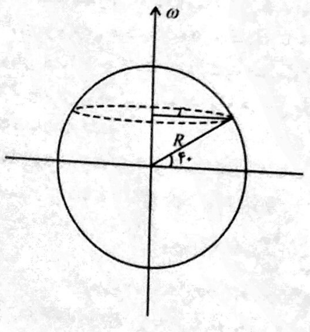
$$a = \sqrt{a_R^۲ + a_T^۲} = \sqrt{(۳/۸۱)^۲ + (-۰/۹۹۴\times ۱۰^{-۳})^۲} = ۳۰/۸۱\ \text{m/s}^۲$$

۲۹••- (الف) تندی زاویه‌ای ω حول محور قطبی برای نقطه‌ای روی سطح زمین در عرض جغرافیایی ۴۰° شمالی چقدر است؟ (زمین به دور این محور می‌چرخد.) (ب) تندی خطی v این نقطه چقدر است؟ مقدارهای (پ) ω و (ت) v برای نقطه‌ای از استوا چقدر است؟ **SSM**

حل: (الف)

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{۲\pi}{۲۴\times ۳۶۰۰} = ۷/۲۷\times ۱۰^{-۵}\ \text{rad/s}$$

زمین در ۲۴ ساعت یک دور می‌چرخد.



(ب)

$$v = r\omega$$

$$r = R\cos ۴۰$$

$R = ۶/۳۷\times ۱۰^۶\ \text{m}$ شعاع زمین است.

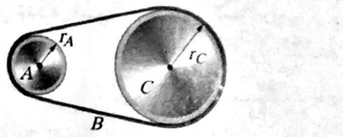
$$v = R\omega\cos ۴۰ = ۳۵۴/۷\ \text{m/s}$$

(پ) مقدار ω در تمام نقاط زمین یکسان است.

(ت)

$$v = R\omega = ۴۶۳/۱\ \text{m/s}$$

۳۰●●● - در شکل ۱۰-۳۲ چرخ A به شعاع $r_A = ۱۰cm$ توسط تسمهٔ B به چرخ C به شعاع $r_C = ۲۵cm$ وصل شده است. تندی زاویه‌ای چرخ A را از حال سکون با آهنگ ثابت $۱/۶ rad/s^۲$ افزایش می‌دهیم. زمان لازم برای اینکه چرخ C به تندی زاویه‌ای $۱۰۰ rev/min$ برسد چقدر است؟ فرض کنید که تسمه لغزش ندارد. (راهنمایی: اگر تسمه لغزش نداشته باشد سرعتهای خطی در هر دو لبهٔ چرخها باید برابر باشند.)



شکل ۱۰-۳۲ مسئلهٔ ۳۰

حل: چون سرعت خطی دو لبهٔ دو چرخ با هم برابر است پس:

$v_C = v_A$ $\quad r_C\omega_C = r_A\omega_A$

$\omega_C = \frac{r_A}{r_C}\omega_A$ $\quad \alpha_C = \frac{r_A}{r_C}\alpha_A$

$\omega_C = ۱۰۰ rev/min = ۱۰/۴۷ rad/s$

$\alpha_C = \frac{۱۰}{۲۵}۱/۶ = ۰/۶۴ rad/s^۲$

$\omega_C = \alpha_C t \Rightarrow t = \frac{\omega_C}{\alpha_C} = \frac{۱۰/۴۷}{۰/۶۴} = ۱۶/۳۶ s$

α_C شتاب زاویه‌ای چرخ C و ω_C سرعت داده شدهٔ آن است.

۳۱●●● - صفحهٔ گرمافونی با تندی زاویه‌ای $۳۳\frac{۱}{۳} rev/min$ می‌چرخد. یک تخم هندوانه روی این صفحه به فاصلهٔ $۶/۰ cm$ از محور چرخش قرار دارد. (الف) شتاب این تخم هندوانه را با فرض اینکه لغزش نداشته باشد به دست آورید. (ب) کمینهٔ مقدار ضریب اصطکاک ایستایی میان تخم هندوانه و صفحه باید چقدر باشد تا تخم هندوانه نلغزد؟ (پ) فرض کنید این صفحه گرامافون تندی زاویه‌ای خود را از حال سکون و با شتاب ثابت در مدت زمان ۰/۲۵ s به دست آورد. کمینهٔ ضریب اصطکاک ایستایی لازم را برای اینکه این تخم هندوانه در طی دورهٔ شتاب گرفتن نلغزد محاسبه کنید.

حل: (الف) چون سرعت زاویه‌ای ثابت است، شتاب زاویه‌ای آن صفر است. ولی شتاب شعاعی آن برابر است با

$\omega = ۳۳\frac{۱}{۳}\times\frac{۲\pi}{۶۰} = ۳/۴۹ rad/s$

$a_R = r\omega^۲ = ۰/۰۶(۳/۴۹)^۲ = ۰/۷۳ m/s^۲$

(ب) در اثر چرخش، نیروی رو به مرکز به تخم هندوانه وارد می‌شود. این نیرو باید با نیروی اصطکاک برابر باشد.

$ma_R = f_s \Rightarrow ma_R = \mu_s mg \Rightarrow \mu_s = \frac{a_R}{g}$

$\mu_s = \frac{۰/۷۳}{۹/۸} = ۰/۰۷۴$

(پ) در این حالت شتاب کل برابر است با

$a = \sqrt{(a_R)^۲ + (a_T)^۲}$

$a_T = R\alpha$

$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{۳/۴۹}{۰/۲۵} = ۱۳/۹۶ rad/s^۲$

$a_T = ۰/۰۶\times۱۳/۹۶ = ۰/۸۴ m/s^۲$

$a = \sqrt{(۰/۸۴)^۲ + (۰/۷۳)^۲} = ۱/۱۱۳ m/s^۲$

$f_s = ma \Rightarrow \mu_s mg = ma$

$\mu_s = \frac{a}{g} = \frac{۱/۱۱۳}{۹/۸} = ۰/۱۱۴$

۳۲●●● - تپ اختر، یک ستارهٔ نوترونی است که با سرعت زیادی می‌چرخد و مانند گسیل باریکهٔ نور توسط فانوس دریایی، باریکه‌ای از موجهای رادیویی گسیل می‌کند. با هر دور چرخش ستاره ما یک تپ رادیویی دریافت می‌کنیم. دورهٔ تناوب T چرخش را با اندازه‌گیری زمان بین تپها اندازه می‌گیرند. تپ اختر واقع در سحابی خرچنگ دارای دورهٔ تناوب $T = ۰/۳۳ s$ است که با آهنگ $۱/۲۶\times۱۰^{-۵} s/y$ افزایش می‌یابد. (الف) شتاب زاویه‌ای α این تپ اختر چقدر است؟ (ب) اگر α ثابت باشد از حالا چند سال طول می‌کشد تا چرخش این تپ اختر متوقف شود؟ (پ) این تپ اختر از انفجار یک ابرنواختر که در سال ۱۰۵۴ مشاهده شد به وجود آمده است. با فرض اینکه α ثابت باشد، دورهٔ تناوب اولیهٔ را به دست آورید.

حل: (الف)

$\omega = \frac{۲\pi}{T}$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{۲\pi}{T}\right) = \frac{-۲\pi}{T^۲}\frac{dT}{dt}$

$\frac{dT}{dt} = ۱/۲۶\times۱۰^{-۵}\frac{s}{y} = \frac{۱/۲۶\times۱۰^{-۵}}{۲۴\times۳۶۵\times۳۶۰۰} = ۴\times۱۰^{-۱۳}$

با جایگذاری α را بدست می‌آوریم:

$\alpha = -\frac{۲\pi}{(۰/۰۳۳)^۲}۴\times۱۰^{-۱۳} = -۲/۳\times۱۰^{-۹} rad/s^۲$

(ب)

$\omega = \alpha t + \omega_۰$

$\omega = ۰ \Rightarrow t = -\frac{\omega_۰}{\alpha}$ $\quad \omega_۰ = \frac{۲\pi}{T}$

$t = -\frac{۲\pi}{T\alpha} = -\frac{۲\times۳/۱۴}{(۰/۰۳۳)(۲/۳\times۱۰^{-۹})} = ۸/۲۶\times۱۰^{۱۰} s$

t برابر با ۲۶۱۹ سال است.

(پ) ابتدا سرعت زاویهٔ تپ اختر را در سال ۱۰۵۴ بدست می‌آوریم.

$۲۰۰۸ - ۱۰۵۴ = ۹۵۴ y$

$t = ۳\times۱۰^{۱۰} s$ $\quad \omega_۰$ سرعت زاویه‌ای در سال ۱۰۵۴ است.

$\omega = \alpha t + \omega_۰ \Rightarrow \omega_۰ = -\alpha t + \omega$

$\omega_۰ = +۲/۳\times۱۰^{-۹}\times۳\times۱۰^{۱۰} + \frac{۲\pi}{۰/۰۳۳}$

$= ۲۵۹/۳ rad/s$

$\omega_۰ = \frac{۲\pi}{T_۰} \Rightarrow T_۰ = \frac{۲\pi}{\omega_۰} = \frac{۲\times۳/۱۴}{۲۵۹/۳} = ۰/۰۲۴۲ s$

$T_۰$، دورهٔ چرخش در سال ۱۰۵۴ است.

۳۳● - لختی چرخشی چرخی را که وقتی با تندی ۶۰۲ rev/min می‌چرخد دارای انرژی جنبشی ۲۴۴۰۰ J است، حساب کنید. SSM

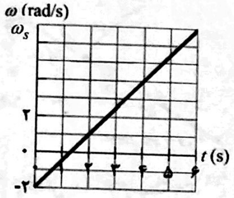
حل: از رابطهٔ انرژی جنبش چرخشی داریم:

$K = \frac{۱}{۲}I\omega^۲$

$\omega = ۶۰۲ rev/min = ۶۰۲\times\frac{۲\pi}{۶۰}\frac{rad}{s} = ۶۳/۰ rad/s$

$I = \frac{۲K}{\omega^۲} = \frac{۲\times۲۴۴۰۰}{(۶۳)^۲} = ۱۲/۳ kg\cdot m^۲$

۳۴● - شکل ۱۰-۳۳ تندی زاویه‌ای میلهٔ نازکی را که حول یک انتهای آن می‌چرخد برحسب زمان نشان می‌دهد. مقیاس محور ω با $\omega_s = ۶/۰ rad/s$ داده شده است. (الف) بزرگی شتاب زاویه‌ای میله چقدر است؟ (ب) در $t = ۴/۰ s$ انرژی جنبشی چرخشی میله برابر ۱/۶۰ J است. انرژی جنبشی آن در $t = ۰$ چقدر است؟



شکل ۱۰-۳۳ مسئلهٔ ۳۴

حل:

(الف)

$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{۷-(-۲)}{۶-۰} = ۱/۵ rad/s^۲$

(ب) از رابطهٔ نسبت میان انرژی‌های جنبشی استفاده می‌کنیم. $k_۰$ انرژی جنبشی چرخشی در $t = ۰$ و k انرژی جنبشی چرخشی در $t = ۴s$ است.

$K = \frac{۱}{۲}I\omega^۲$ $\quad K_۰ = \frac{۱}{۲}I\omega_۰^۲$

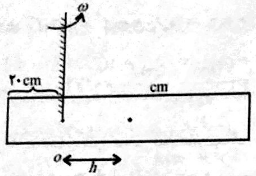
$\frac{K}{K_۰} = \left(\frac{\omega}{\omega_۰}\right)^۲ \Rightarrow K_۰ = K\left(\frac{\omega_۰}{\omega}\right)^۲$

$\omega_۰$ سرعت زاویه‌ای در $t = ۰$ برابر با ۲rad/s- است.

$K_۰ = ۱/۶\left(\frac{-۲}{۴}\right)^۲ = ۰/۴ J$

۳۵● - لختی چرخشی یک خط‌کش یک متری به جرم ۰/۵۶ kg را که حول محوری عمود بر این خط‌کش که از نقطهٔ ۲۰ cm آن می‌گذرد می‌چرخد حساب کنید. (خط‌کش را به صورت یک میلهٔ نازک فرض کنید.) SSM

حل: از قضیهٔ محورهای موازی استفاده می‌کنیم.



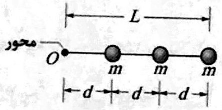
$I_{O'} = I_C + Mh^۲$

$h = ۰/۵m - ۰/۲ = ۰/۳m$

$I_C = \frac{۱}{۱۲}ml^۲ = \frac{۱}{۱۲}\times۰/۵۶\times(۱)^۲ = ۴/۶۷\times۱۰^{-۲} kg\cdot m^۲$

$I_{O'} = ۴/۶۷\times۱۰^{-۲} + ۰/۵۶\times(۰/۳)^۲ = ۹/۷\times۱۰^{-۲} kg\cdot m^۲$

۳۶● - شکل ۱۰-۳۴ سه جسم به جرم ۰/۰۱۰۰ kg را نشان می‌دهد که به میله‌ای به طول $L = ۶/۰۰ cm$ و جرم ناچیز متصل‌اند. کل این مجموعه می‌تواند حول محوری عمودی که از نقطهٔ O در انتهای چپ می‌گذرد بچرخد. اگر یک جسم (که ۳۳٪ جرم را تشکیل می‌دهد) را برداریم حداکثر تا چند درصد لختی چرخشی این مجموعه حول محور چرخش کاهش می‌یابد در صورتی که جسم برداشته شده (الف) جسم میانی و (ب) یکی از جسمهای بیرونی باشد؟



شکل ۱۰-۳۴ مسئله‌های ۳۶ و ۶۴

حل: (الف) اگر جسم میانی را برداریم، لختی چرخشی برابر است با:

$I = \sum_i m_ir_i^۲ = m_۱r_۱^۲ + m_۲r_۲^۲ + m_۳r_۳^۲ = m(d^۲) + m(۳d)^۲$

$= ۱۰md^۲$

سختی چرخشی زمانی که هر سه جرم قرار دارند برابر است با:

$I_{کل} = \sum_i m_ir_i^۲ = m_۱r_۱^۲ + m_۲r_۲^۲ + m_۳r_۳^۲$

$= md^۲ + m(۲d)^۲ + m(۳d)^۲$

$I_{کل} = ۱۴md^۲$

میزان تغییرات انرژی جنبشی برابر است با:

$\frac{\Delta I}{I} = \frac{I_۰ - I}{I_۰} = \frac{۱۴md^۲ - ۱۰md^۲}{۱۴md^۲} = ۰/۲۹$

(ب) اگر جرم اول را برداریم:

$I = \sum_i m_ir_i^۲ = m_۲r_۲^۲ + m_۳r_۳^۲ = m(۲d)^۲ + m(۳d)^۲$

$= ۱۳md^۲$

میزان تغییرات در انرژی جنبشی برابر است با:

$\frac{\Delta I}{I} = \frac{I_۰ - I}{I_۰} = \frac{۱۴md^۲ - ۱۳md^۲}{۱۴md^۲} = ۰/۰۷۱$

اگر جرم سوم را برداریم:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = md^2 + m(2d)^2 = 5md^2$$

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{I_0 - I}{I_0} = \frac{14md^2 + 5md^2}{14md^2} = 0.64$$

۳۷•- دو استوانهٔ صلب یکنواخت که هر یک حول محور مرکزی (طولی) خود می‌چرخند دارای جرم یکسان 1.25 kg هستند و با تندی زاویه‌ای یکسان 235 rad/s می‌چرخند ولی شعاعهای آنها متفاوت است. انرژی جنبشی چرخشی (الف) استوانهٔ کوچکتر به شعاع 0.25 m و (ب) استوانهٔ بزرگتر به شعاع 0.75 m چقدر است؟ SSM

حل: (الف) لختی چرخشی استوانه برابر است با:

$$I = \frac{1}{2}mr^2$$

$$r_1 = 0.25\,\text{m}$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \times 1.25(0.25)^2 = 0.039\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

انرژی جنبشی چرخشی برابر است با:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

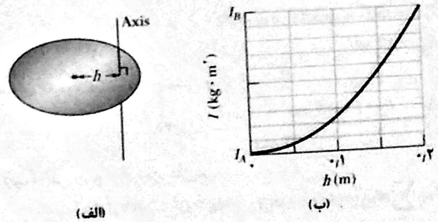
$$K_1 = \frac{1}{2} \times 0.039 \times (235)^2 = 1076.9\,\text{J}$$

(ب)

$$I_2 = \frac{1}{2}mr_2^2 = \frac{1}{2} \times 1.25(0.75)^2 = 0.35\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2}I_2\omega^2 = \frac{1}{2}0.35(235)^2 = 9664.37\,\text{J}$$

۳۸•- شکل ۱۰-۳۵ الف قرصی را نشان می‌دهد که می‌تواند حول محوری عمود بر صفحهٔ آن و به فاصلهٔ شعاعی h از مرکز قرص بچرخد. شکل ۱۰-۳۵ ب لختی چرخشی I این قرص را حول این محور به صورت تابعی از فاصلهٔ h نشان می‌دهد که از مرکز شروع و تا لبهٔ قرص تغییر می‌کند. مقیاس محور I با $I_A = 0.050\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ و $I_B = 0.150\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ مشخص شده است. جرم قرص چقدر است؟



شکل ۱۰-۳۵ مسئلهٔ ۳۸

حل:
از قضیهٔ محورهای موازی داریم:

$$I_{O'} = I_C + Mh^2$$

زمانی که $h = 0$ باشد، $I_{O'} = I_{CM}$ است.

$$I_{CM} = I_A = 0.05\,\text{hg}\cdot\text{m}^2$$

$$0.05 = \frac{1}{2}mR^2$$

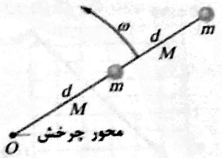
از روی نمودار پیداست. بیشترین مقدار h برابر با R (شعاع قرص است)

$$R = 0.2\,\text{m}$$

$$0.05 = \frac{1}{2}m(0.2)^2$$

$$m = 2.5\,\text{kg}$$

۳۹••- شکل ۱۰-۳۶ دو جسم هر یک به جرم $m = 0.85\,\text{kg}$ را نشان می‌دهد که توسط دو میلهٔ نازک هر یک به طول 5.6 cm و جرم $M = 1.2\,\text{kg}$ به یکدیگر و محور چرخش در نقطهٔ O متصل‌اند. کل این مجموعه با تندی زاویه‌ای $\omega = 0.30\,\text{rad/s}$ حول محور چرخش می‌چرخد. (الف) لختی چرخشی و (ب) انرژی جنبشی این مجموعه نسبت به نقطهٔ O چقدر است؟ GO



شکل ۱۰-۳۶ مسئلهٔ ۳۹

حل: (الف) لختی چرخش میلهٔ اول برابر است با:

$$I_1 = \frac{1}{3}Md^2$$

از قضیهٔ محورهای موازی استفاده می‌کنیم تا لختی چرخشی میلهٔ دوم را بیابیم: (نسبت به O)

$$I_2 = \frac{1}{12}Md^2 + M\left(d + \frac{d}{2}\right)^2 = \frac{7}{3}Md^2$$

بنابراین لختی چرخشی کل برابر است با:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{1}{3}Md^2 + \frac{7}{3}Md^2 + md^2 + 4md^2$$

$$I = \left(5m + \frac{8}{3}M\right)d^2$$

$$I = \left(5 \times 0.85 + \frac{8}{3} \times 1.2\right)(0.056)^2 = 0.023\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

(ب)

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \times 0.023(0.3)^2 = 1.04 \times 10^{-3}\,\text{J}$$

۴۰••- چهار جسم یکسان به جرم 0.50 kg که هر یک در گوشه‌های مربعی 2.0 m × 2.0 m قرار دارند، با چهار میلهٔ بدون جرم به هم متصل‌اند. لختی چرخشی این جسم صلب را حول محوری که (الف) از وسط ضلعهای رو به رو می‌گذرد و در صفحهٔ مربع قرار دارد، (ب) از وسط یکی از ضلعها می‌گذرد و عمود بر صفحهٔ مربع است و (پ) در صفحهٔ مربع است و از دو جسم رو به روی هم که روی قطر آن قرار دارند می‌گذرد به دست آورید.

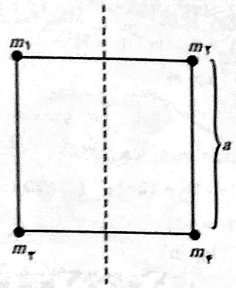
حل: (الف) از تعریف لختی دورانی داریم:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2$$

$$I = m\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$I = ma^2 = 0.5 \times (2)^2 = 2\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$



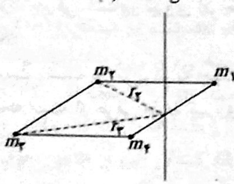
(ب)

$$r_2 = r_4 = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}}\,a$$

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2$$

$$I = m\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m\left(\sqrt{\frac{5}{4}}a\right)^2 + m\left(\sqrt{\frac{5}{4}}a\right)^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$I = 3ma^2 \Rightarrow I = 3 \times 0.5 \times (2)^2 = 6\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$



(پ)

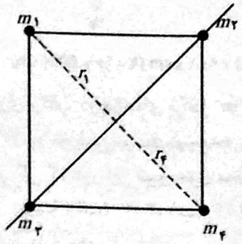
$$r_1 = r_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$r_3 = r_2 = 0$$

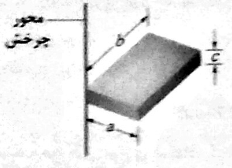
$$I = \sum_i m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_4 r_4^2 = m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$$

$$= ma^2$$

$$I = 0.5 \times (2)^2 = 2\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$



۴۱••- قطعهٔ صلب و یکنواخت در شکل ۱۰-۳۷ دارای جرم 0.172 kg و ضلعهای $a = 3.5\,\text{cm}$، $b = 8.4\,\text{cm}$ و $c = 1.4\,\text{cm}$ است. لختی چرخشی این قطعه را حول محوری که از یکی از گوشه‌های آن می‌گذرد و بر وجه‌های بزرگتر عمود است حساب کنید. SSM WWW



شکل ۱۰-۳۷ مسئلهٔ ۴۱

حل: از تعریف لختی چرخشی داریم:

$$I = \int r^2\,dm$$

$$dm = \rho\,dv = \rho\,dx\,dy\,dz$$

$$\rho = \frac{M}{abc}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$I = \int_v (x^2 + y^2)\rho\,dx\,dy\,dz = \rho c\int_s (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

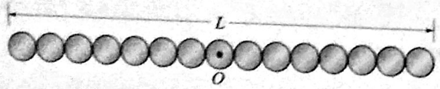
$$\rho c\left[\int_0^a x^2 dx \int_0^b dy + \int_0^a dx \int_0^b y^2 dy\right]$$

$$\frac{M}{abc}c\left[\frac{1}{3}a^3 b + a\frac{1}{3}b^3\right] = \frac{M}{ab}\left[\frac{1}{3}a^3 b + \frac{1}{3}ab^3\right]$$

$$I = M\frac{1}{3}[a^2 + b^2]$$

$$I = \frac{1}{3} \times 0.172 \times [(0.035)^2 + (0.084)^2] = 4.7 \times 10^{-4}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

۴۲••- شکل ۱۰-۳۸ آرایه‌ای از ۱۵ قرص مشابه را نشان می‌دهد که به صورت میله‌ای به طول $L = 1.0000\,\text{m}$ و جرم (کل) $M = 100.0\,\text{mg}$ به یکدیگر چسبیده‌اند. این آرایه می‌تواند حول محور عمودی که از نقطهٔ O در قرص مرکزی می‌گذرد بچرخد. (الف) لختی چرخشی این آرایه حول این محور چقدر است؟ (ب) اگر فرض کنیم که این آرایه به صورت میلهٔ یکنواختی به جرم M و طول L باشد، و اگر از رابطهٔ جدول ۱۰-۲ ث برای محاسبهٔ لختی چرخشی استفاده کنیم، تا چند درصد خطا خواهیم داشت؟



شکل ۱۰-۳۸ مسئلهٔ ۴۲

حل: (الف) قطر هر قرص برابر است با:

$$D = \frac{L}{15} = \frac{1}{15}m$$

پس شعاع هر قرص برابر است با $R=\frac{D}{2}=\frac{1}{30}m$

گشتاور لختی قرص‌های سمت راست برابر است با:

$$I=\frac{1}{2}mR^2+m(2R)^2+\frac{1}{2}mR^2+m(4R)^2+\frac{1}{2}mR^2+m(6R)^2+\frac{1}{2}mR^2+(8R)^2m+\frac{1}{2}mR^2+m(10R)^2+\frac{1}{2}mR^2+m(12R)^2+\frac{1}{2}mR^2+(14R)^2$$

$$I=\frac{7}{2}mR^2+560mR^2$$

در محاسبه از قضیهٔ محورهای موازی استفاده کردیم.

طبق همین محاسبه گشتاور لختی سمت چپ نیز $\frac{7}{2}mR^2+560mR^2$ می‌شود. گشتاور لختی کل برابر است با:

$$I=I_{چپ}+I_{راست}+\frac{1}{2}mR^2$$

$\frac{1}{2}mR^2$ گشتاور لختی قرص مرکزی است.

$$I=\frac{2255}{2}mR^2=8/356\times10^{-6}\ kg\cdot m^2$$

(ب) اگر قرص‌ها را با هم یک میله در نظر بگیریم آنگاه

$$I=\frac{1}{12}ML^2$$

$$I=\frac{1}{2}\times(10^{-4})(1)^2=8/33\times10^{-6}\ kg\cdot m^2$$

میزان خطا برابر است با:

$$\frac{|\Delta I|}{I}\times100=\frac{(8/356-8/330)\times10^{-6}}{(8/356)\times10^{-6}}\times100=\%0/22$$

۴۳●● - بعضی از کامیونها با بهره گرفتن از انرژی ذخیره شده در یک چرخ لنگر در حال چرخش حرکت می‌کنند. انرژی این کامیونها با استفاده از یک موتور الکتریکی که چرخ لنگر را به تندی نهایی 200π rad/s می‌رساند تأمین می‌شود. چنین چرخ لنگری یک استوانهٔ توپر و یکنواخت به جرم ۵۰۰kg و شعاع ۱/۰m است. (الف) انرژی جنبشی چرخ لنگر پس از تأمین انرژی چقدر است؟ (ب) اگر توان متوسط لازم برای کار کامیون ۸/۰kW باشد، پس از هر بار تأمین انرژی، کامیون به مدت چند دقیقه کار می‌کند؟

حل: (الف)

$$K=\frac{1}{2}I\omega^2\Rightarrow K=\frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega^2=\frac{1}{4}(500)(1)^2(200\pi)^2$$

$$=4/935\times10^7\ s$$

(ب) $$\overline{P}=\frac{\Delta K}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=\frac{\Delta K}{\overline{P}}=\frac{4/935\times10^7}{8000}=6/17\times10^3\ s$$

۴۴●●● - جرمها و مختصات چهار ذره عبارت‌اند از: ۵۰g، $x=2/0cm$، $y=2/0cm$؛ ۲۵g، $x=0$، $y=4/0cm$؛ ۲۵g، $x=-3/0cm$، $y=-3/0cm$؛ ۳۰g، $x=-2/0cm$، $y=4/0cm$. لختی چرخشی این مجموعه را حول محورهای (الف) x، (ب) y و (پ) z به دست آورید. (ت) فرض کنید پاسخ قسمت (الف) و (ب) به ترتیب A و B باشد، آنگاه پاسخ (پ) برحسب A و B چقدر است؟

حل: (الف)

$$I=\sum_i m_ir_i^2$$

$$I_x=\sum_i m_iy_i^2\Rightarrow I_x=m_1y_1^2+m_2y_2^2+m_3y_3^2+m_4y_4^2$$

$$I_x=50\times10^{-3}(0/02)^2+25\times10^{-3}(0/04)^2+25\times10^{-3}(-0/03)^2+30\times10^{-3}(0/04)^2$$

$$I=1/305\times10^{-4}\ kg\cdot m^2$$

(ب)

$$I_y=\sum_i m_ix_i^2$$

$$I_y=m_1x_1^2+m_2x_2^2+m_3x_3^2+m_4x_4^2$$

$$I_y=50\times10^{-3}(0/02)^2+25\times10^{-3}(0)+25\times10^{-3}(-0/03)^2+30\times10^{-3}(-0/02)^2$$

$$I_y=5/45\times10^{-5}\ kg\cdot m^2$$

(پ) $$I_z=\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)=\sum_i m_ix_i^2+\sum_i m_iy_i^2=I_x+I_y$$

$$I_z=1/85\times10^{-4}\ kg\cdot m^2$$

(ت) $I_x=A$ $I_y=B$ $I_z=I_x+I_y=A+B$

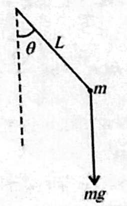
۴۵● - گلولهٔ کوچکی به جرم ۰/۷۵kg به یک انتهای میلهٔ بدون جرمی به طول ۱/۲۵m بسته شده و انتهای دیگر میله از نقطه‌ای آویزان است. وقتی این آونگ ایجاد شده با محور قائم زاویهٔ ۳۰° بسازد، بزرگی گشتاور نیروی آن حول نقطهٔ آویز چقدر است؟ SSM

حل: از قاعدهٔ دست راست پی می‌بریم به جهت گشتاور نیرو رو به داخل صفحه است. از طرفی فقط نیروی وزن، گشتاور نیرو ایجاد می‌کند.

$$\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\tau=rF\sin\theta$$

$$\tau=Lmg\sin\theta$$



$$\tau=1/25\times0/75\times9/8\times\sin(30^\circ)=45N\cdot m$$

۴۶● - طول بازوی رکاب دوچرخه‌ای برابر ۰/۱۵۲m است و یک نیروی ۱۱۱N رو به پایین توسط دوچرخه سوار به رکاب وارد می‌شود. بزرگی گشتاور این نیرو حول محور بازوی رکاب وقتی بازو در زاویهٔ (الف) ۳۰°، (ب) ۹۰° و (پ) ۱۸۰° نسبت به قائم قرار دارد چقدر است؟

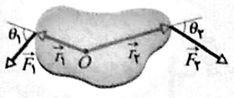
حل: (الف) $\tau=rF\sin\theta$

$$\tau=0/152\times111\times\sin(30^\circ)=8/4N\cdot m$$

(ب) $$\tau=rF\sin\theta=0/152\times111\sin(90)=16/872\ N\cdot m$$

(پ) $$\tau=rF\sin\theta=0/152\times111\sin(180)=0$$

۴۷● - جسم شکل ۱۰-۳۹ می‌تواند حول نقطهٔ O بچرخد و دو نیرو مطابق شکل بر آن وارد می‌شود. اگر $r_1=1/30m$، $r_2=2/15m$ و $F_1=4/20N$، $F_2=4/90N$، $\theta_1=75/0^\circ$ و $\theta_2=60/0^\circ$ باشد، گشتاور نیروی خالص نسبت به این نقطه چقدر است؟ SSM ILW



شکل ۱۰-۳۹ مسئلهٔ ۴۷

حل:

$$\vec{\tau}_1=\vec{r}_1\times\vec{F}_1$$

از قاعدهٔ دست راست پی می‌بریم، جهت $\vec{\tau}_1$ رو به خارج صفحه است.

$$\tau_1=1/3\times4/2\times\sin(75^\circ)=5/27N\cdot m$$

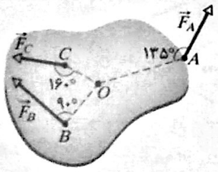
از قاعدهٔ دست راست، $\vec{\tau}_2$ در جهت داخل صفحه است.

$$\tau_2=2/15\times4/9\times\sin(60^\circ)=9/12N\cdot m$$

بنابراین گشتاور برایند به سمت داخل صفحه است:

$$\tau_2-\tau_1=9/12N\cdot m-5/27N\cdot m=3/85N\cdot m$$

۴۸● - جسم نشان داده شده در شکل ۱۰-۴۰ می‌تواند حول نقطهٔ O بچرخد، سه نیروی وارد برآن عبارت‌اند از: $F_A=10N$ در نقطهٔ A به فاصلهٔ ۸/۰m از نقطهٔ O؛ $F_B=16N$ در نقطهٔ B به فاصلهٔ ۴/۰m از نقطهٔ O و $F_C=19N$ در نقطهٔ C به فاصلهٔ ۳/۰m از نقطهٔ O. گشتاور نیروی خالص حول نقطهٔ O چقدر است؟



شکل ۱۰-۴۰ مسئلهٔ ۴۸

$$\vec{\tau}_A=\vec{r}_A\times\vec{F}_A$$

گشتاور نیروی τ_A به سمت خارج صفحه است.

$$\tau_A=r_AF_A\sin\theta=8\times10\times\sin(180-135)=56/57N\cdot m$$

گشتاور نیروی τ_B به سمت داخل صفحه است.

$$\tau_B=4\times16\times\sin(90)=64\ N\cdot m$$

گشتاور نیروی τ_C به سمت خارج صفحه است.

$$\tau_C=3\times19\times\sin(180-160)=19/38N\cdot m$$

گشتاور برآیند برابر است با:

$$\tau=56/57+19/38-64=11/95N\cdot m$$

که به سمت خارج صفحه است.

۴۹● - شیرجه رونده‌ای از سکوی شیرجه پرش می‌کند و در طی آن تندی زاویه‌ای او حول مرکز جرمش در مدت ۲۲۰ms از صفر تا ۶/۲۰ rad/s تغییر می‌کند. لختی چرخشی شیرجه رونده نسبت به مرکز جرمش ۱۲/۰kg·m² است. در طی این پرش بزرگی (الف) شتاب زاویه‌ای میانگین و (ب) گشتاور نیروی خارجی میانگین وارد بر او از طرف تخته چقدر است؟ SSM ILW

حل: (الف) $$\alpha=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{6/2}{220\times10^{-3}}=28/18rad/s^2$$

(ب) از رابطهٔ بین گشتاور نیرو و شتاب زاویه‌ای داریم:

$$\tau=I\alpha\Rightarrow\tau=12\times28/18=338/16N\cdot m$$

۵۰● - اگر گشتاور نیروی ۳۲/۰N.m وارد بر چرخی باعث ایجاد شتاب زاویه‌ای ۲۵/۰rad/s² شود، لختی چرخشی چرخ چقدر است؟

حل: از رابطهٔ بین گشتاور نیرو و شتاب زاویه‌ای داریم:

$$\tau=I\alpha\Rightarrow I=\frac{\tau}{\alpha}=\frac{32}{25}=1/28kg\cdot m^2$$

۵۱●●● - شکل ۱۰-۴۱ قرص یکنواختی را نشان می‌دهد که همانند یک چرخ و فلک حول مرکزش می‌چرخد. شعاع این قرص برابر ۲/۰۰cm و جرم آن ۲۰/۰ گرم و در ابتدا در حال سکون است. با شروع از زمان $t=0$ دو نیروی نشان داده شده بر لبهٔ آن به طور مماس وارد می‌شوند به طوری که در زمان $t=1/25s$ این قرص دارای سرعت زاویه‌ای ۲۵۰rad/s به طور پادساعتگرد است. نیروی $\vec{F}_1$ دارای بزرگی ۰/۱۰۰N است. بزرگی نیروی $\vec{F}_2$ چقدر است؟ GO

شکل ۱۰-۴۱ مسئلهٔ ۵۱

حل: ابتدا گشتاور نیرو را می‌یابیم.

$$I=\frac{1}{2}mR^2=\frac{1}{2}(20\times10^{-3})(2\times10^{-2})^2=4\times10^{-6}\ kg\cdot m^2$$

$$\tau=I\alpha$$

$$\alpha=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{250}{1/25}=200\ rad/s^2$$

جایگذاری می‌کنیم

$$\tau=4\times10^{-6}(200)=8\times10^{-4}\ N\cdot m$$

از طرفی برای گشتاور نیرو داشتیم:

$$\vec{\tau}=\vec{r}_1\times\vec{F}_1+\vec{r}_2\times\vec{F}_2$$

$\tau = -0.02 \times 0.1 + 0.02 \times F_2$

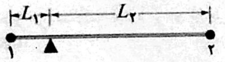
اکنون دو گشتاور را برابر قرار می‌دهیم.

$8 \times 10^{-4} = 2 \times 10^{-3} + 2 \times 10^{-2} F_2$

$28 \times 10^{-4} = 2 \times 10^{-2} F_2$

$F_2 = 0.14\,N$

۵۲••- شکل ۱۰-۴۲ دو ذرهٔ ۱ و ۲ را نشان می‌دهد که جرم هر یک m است و به دو انتهای میلهٔ بدون جرم صلبی به طول $L_1 + L_2$ متصل‌اند، به طوری که $L_1 = 20\,cm$ و $L_2 = 80\,cm$. این میله را به طور افقی روی تکیه‌گاهی قرار می‌دهیم و سپس رها می‌کنیم. بزرگی شتابهای اولیهٔ (الف) ذرهٔ ۱ و (ب) ذرهٔ ۲ چقدر است؟



شکل ۱۰-۴۲ مسئلهٔ ۵۲

حل: (الف) ابتدا گشتاور نیروی کل را می‌یابیم

رو به خارج صفحه را مثبت در نظر می‌گیریم. $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\tau = mgL_1 - mgL_2 = mg(L_1 - L_2) = -mg(L_2 - L_1)$

بعضی گشتاور برآیند، رو به داخل صفحه است.

$|\tau| = I\alpha$

$I = m_1 L_1^2 + m_2 L_2^2 = m(L_1^2 + L_2^2)$

$\Rightarrow mg(L_2 - L_1) = m(L_1^2 + L_2^2)\alpha$

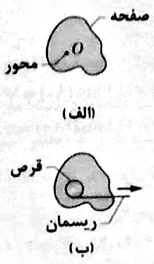
$\alpha = g\dfrac{L_2 - L_1}{L_1^2 + L_2^2} = 8.65\,rad/s^2$

اکنون از رابطهٔ بین شتاب خطی و شتاب زاویه‌ای استفاده می‌کنیم:

$|a_1| = L_1\alpha = 0.2 \times 8.65 = 1.73\,m/s^2$

(ب) $|a_2| = L_2\alpha = 0.8 \times 8.65 = 6.92\,m/s^2$

۵۳••- در شکل ۱۰-۴۳ الف یک صفحهٔ پلاستیکی با شکل نامنظم و با ضخامت و چگالی (جرم در یکای حجم) یکنواخت را حول محوری که عمود بر صفحه است و از نقطهٔ O می‌گذرد بچرخش در می‌آوریم. لختی چرخشی صفحه حول این محور با روش زیر اندازه‌گیری می‌شود. یک قرص دایره‌ای به جرم $0.500\,kg$ و شعاع $2.00\,cm$ را به این صفحه می‌چسبانند، به طوری که مرکز آن با نقطهٔ O بر هم قرار گیرند (شکل ۱۰-۴۳ ب). ریسمانی را به دور لبهٔ این قرص مثل ریسمانی که دور فرفره‌ای پیچانده می‌شود می‌پیچانند. سپس نخ به مدت $5.00\,s$ کشیده می‌شود. در نتیجه، قرص و صفحه با نیروی ثابتی برابر $0.400\,N$ که مماس بر لبهٔ قرص است به‌چرخش در می‌آیند. تندی زاویه‌ای حاصل برابر $114\,rad/s$ است. لختی چرخشی صفحه حول این محور چقدر است؟



شکل ۱۰-۴۳ مسئلهٔ ۵۶

حل:

$\tau = I\alpha$

در اینجا I مجموع گشتاور لختی قرص (I_1) و صفحهٔ پلاستیکی (I_2) است. τ گشتاور نیرو است که خود برابر است با:

$\tau = rF = 0.02 \times 0.4 = 8 \times 10^{-3}\,N \cdot m$

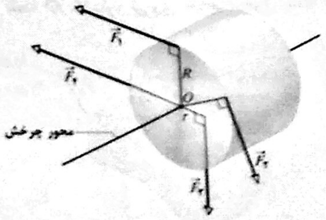
$\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{114}{5} = 22.8\,rad/s^2$

$(I_1 + I_2)\alpha = 8 \times 10^{-3}$

$I_2 = \dfrac{8 \times 10^{-3}}{\alpha} - I_1 \Rightarrow I_2 = \dfrac{8 \times 10^{-3}}{22.8} - \dfrac{1}{2} \times 0.5 \times (0.02)^2$

$= 2.5 \times 10^{-4}\,kg \cdot m^2$

۵۴••- در شکل ۱۰-۴۴ استوانه‌ای به جرم $2.0\,kg$ حول محور مرکزی آن که از نقطهٔ O می‌گذرد می‌چرخد. نیروهای واردهٔ نشان داده شده در شکل عبارت‌اند از: $F_1 = 6.0\,N$، $F_2 = 4.0\,N$، $F_3 = 2.0\,N$ و $F_4 = 5.0\,N$. هم چنین، $r = 5.0\,cm$ و $R = 12\,cm$ است. مطلوب است (الف) بزرگی و (ب) جهت شتاب زاویه‌ای استوانه. (در طی چرخش زاویهٔ نیروها نسبت به استوانه تغییر نمی‌کنند.)



شکل ۱۰-۴۴ مسئلهٔ ۵۴

حل: (الف)

$\tau = I\alpha$

$I = \dfrac{1}{2}MR^2 = \dfrac{1}{2} \times 2 \times (0.12)^2 = 0.0144\,kg \cdot m^2$

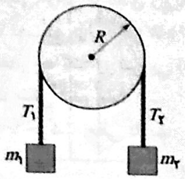
$\tau = |\vec{r} \times \vec{F}| = RF_1 - RF_2 - rF_3 - 0 = R(F_1 - F_2) - rF_3$

$\tau = 0.12(6 - 4) - 0.05(2) = 0.14\,N \cdot m$

$\alpha = \dfrac{\tau}{I} = \dfrac{0.14}{0.0144} = 9.72\,rad/s^2$

(ب) جهت α پادساعتگرد است

۵۵••- در شکل ۱۰-۴۵ جرم یک جسم $m_1 = 460\,g$ و جرم دیگری $m_2 = 500\,g$ است، و قرقره که روی محوری افقی و بدون اصطکاک سوار شده دارای شعاع $5.00\,cm$ است. وقتی آنها را از حال سکون رها کنیم، جسم سنگینتر به اندازهٔ $75.0\,cm$ در مدت $5.00\,s$ (بدون اینکه نخ روی قرقره بلغزد) به طرف پایین می‌آید. (الف) بزرگی شتاب این جسم چقدر است؟ کشش ریسمان در قسمتی که (ب) جسم سنگینتر و (پ) جسم سبکتر را نگه می‌دارد چقدر است؟ (ت) بزرگی شتاب زاویه‌ای قرقره چقدر است؟ (ث) لختی چرخشی آن چقدر است؟



شکل ۱۰-۴۵ مسئله‌های ۵۵ و ۷۳

حل: (الف) برای سقوط جرم m_2 داریم: $y = \dfrac{1}{2}at^2$

$a = \dfrac{2y}{t^2} = \dfrac{2 \times 0.75}{25} = 0.06\,m/s^2$

$m_2 g - T_2 = m_2 a \Rightarrow T_2 = m_2(g - a)$

$T_2 = 0.5 \times (9.8 - 0.06) = 4.87\,N$

(پ) شتاب جسم m_1 نیز $0.06\,m/s^2$ است. چون در همان زمان، همان جابجایی را دارد.

$T_1 - m_1 g = m_1 a \Rightarrow T_1 = m_1(g + a)$

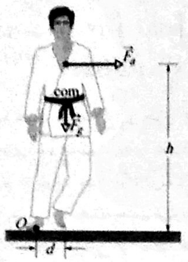
$= 0.46(9.8 + 0.06) = 4.53\,N$

(ت) $a = R\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{a}{R} = \dfrac{0.06}{0.05} = 1.2\,rad/s^2$

(ث) $\tau = I\alpha \Rightarrow (T_2 - T_1)R = I\alpha \Rightarrow I = \dfrac{(T_2 - T_1)R}{\alpha}$

$I = \dfrac{4.87 - 4.53}{1.2} 0.05 = 0.014\,kg \cdot m^2$

۵۶••- در ورزش جودو در حرکت سریع پا، شما پای چپ حریف را از زیر او سریعاً می‌زنید در حالی که لباس او را به همان طرف می‌کشید. در نتیجه حریف به دور پای راستش می‌چرخد تا به زمین بخورد. شکل ۱۰-۴۶ نشان دهندهٔ نمودار ساده شده‌ای از حریف در برابر شماست به طوری پای چپ او زده شده است. محور چرخش از نقطهٔ O می‌گذرد. نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد بر او، به طور مؤثری بر مرکز جرم او وارد می‌شود که به فاصلهٔ $d = 28\,cm$ از نقطهٔ O قرار دارد. جرم شخص برابر $70\,kg$ و لختی چرخشی او حول نقطهٔ O برابر $65\,kg/m^2$ است. بزرگی شتاب زاویه‌ای اولیهٔ او حول نقطهٔ O چقدر است در صورتی که نیروی $\vec{F}_a$ کشیدن لباس او (الف) ناچیز و (ب) افقی و به بزرگی $300\,N$ در ارتفاع $h = 1.4\,m$ وارد شده باشد؟ [redacted]



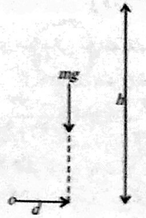
شکل ۱۰-۴۶ مسئلهٔ ۵۶

حل: (الف) در این حالت نیروی وزن سبب زمین خوردن می‌شود.

$\tau = rF\sin\theta$

$\tau = r\sin\theta\, mg \qquad r\sin\theta = d$

$\tau = mgd = 70 \times 9.8 \times 0.28 = 192.08\,N \cdot m$



$\tau = I\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{\tau}{I} = \dfrac{192.08}{65} = 2.96\,rad/s^2$

(ب) در این حالت نیروی F_a گشتاور نیرو تولید می‌کنند که در راستای گشتاور نیروی وزن است.

$\tau = rF\sin\theta \Rightarrow \tau = mgd + F_a h = 192.08 + 300 \times 1.4$

$= 612.08\,N \cdot m$

$\alpha = \dfrac{\tau}{I} = \dfrac{612.08}{65} = 9.42\,rad/s^2$

۵۷•••- قرقره‌ای به شعاع $10\,cm$ و لختی چرخشی $1.0 \times 10^{-3}\,kg.m^2$ نسبت به محورش، تحت تأثیر نیرویی مماس بر لبهٔ آن قرار دارد. بزرگی این نیرو برحسب زمان به صورت $F = 0.5t + 0.3t^2$ تغییر می‌کند که F برحسب نیوتون و t برحسب ثانیه است. این قرقره ابتدا در حال سکون است. در $t = 3.0\,s$ (الف) شتاب زاویه‌ای و (ب) تندی زاویه‌ای آن را به دست آورید.

حل: (الف) از روابط گشتاور بهره می‌گیریم:

$\tau = I\alpha \qquad \tau = RF$

$RF = I\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{R}{I}F = \dfrac{0.1}{10^{-3}}(0.5t + 0.3t^2)$

$$= (۳۰t^۲ + ۵۰t)\frac{rad}{s^۲}$$

$$\alpha(t=۳) = ۳۰(۳)^۲ + ۵۰(۳) = ۴۲۰\,rad/s^۲$$

(ب)

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \omega = \int \alpha\, dt = \int_۰^۳ (۳۰t^۲ + ۵۰t)\,dt$$

$$\omega = (۱۰t^۳ + ۲۵t^۲)\Big|_۰^۳ = ۴۹۵\ rad/s$$

۵۸•- میلهٔ نازکی به طول ۰/۷۵cm و جرم ۰/۴۲kg آزادانه از یک انتهای آن آویخته شده است. میله را به یک طرف می‌کشیم و سپس رها می‌کنیم تا بتواند شبیه یک آونگ ساده تاب بخورد. وقتی این میله به پایینترین وضعیت خود می‌رسد، تندی زاویه‌ای آن ۴/۰rad/s است. با چشمپوشی از اصطکاک و مقاومت هوا (الف) انرژی جنبشی میله را در پایینترین وضعیت خود به دست آورید و (ب) فاصلهٔ بالا رفتن مرکز جرم نسبت به پایینترین وضعیت چقدر است؟

حل: (الف) $I = \frac{۱}{۳}ml^۲$ $\qquad K = \frac{۱}{۲}I\omega^۲$

$$I = \frac{۱}{۳}۰/۴۲ \times (۰/۷۵)^۲ = ۰/۰۸kg\cdot m^۲$$

$$K = \frac{۱}{۲}۰/۰۸ \times (۴)^۲ = ۰/۶۴\,J$$

(ب) از پایستگی انرژی مکانیکی کل استفاده می‌کنیم.

$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow K + ۰ = U + ۰ \Rightarrow K = U$$

$$U = mgh \Rightarrow h = \frac{K}{mg} \Rightarrow h = \frac{۰/۶۴}{۰/۴۲ \times ۹/۸} = ۰/۱۶m$$

۵۹•- یک چرخ ۳۲/۰ کیلوگرمی به شکل حلقهٔ نازکی به شعاع ۱/۲۰m با ۲۸۰rev/min می‌چرخد. می‌خواهیم آن را در مدت ۱۵/۰s متوقف کنیم. (الف) چقدر کار باید برای توقف آن انجام داد. (ب) توان میانگین لازم چقدر است؟

حل: (الف) طبق قضیهٔ کار- انرژی جنبشی، این میزان کار برابر است با تغییرات انرژی جنبشی

$I = mR^۲$

$$W = \Delta K = -K_i = -\frac{۱}{۲}I\omega^۲$$

$$W = -\frac{۱}{۲} \times ۳۲ \times (۱/۲)^۲ \left(۲۸۰ \times \frac{۲\pi}{۶۰}\right)^۲ = -۱۹۷۸۰J$$

(ب)

$$\overline{P} = \left|\frac{\Delta k}{\Delta t}\right| = \frac{۱۹۷۸۰}{۱۵} = ۱۳۱۸/۷w$$

۶۰•- (الف) اگر در شکل ۱۰-۱۸ $R = ۱۲cm$، $M = ۴۰۰g$ و $m = ۵۰g$ باشند، تندی جسم را پس از اینکه از حال سکون به اندازهٔ ۵۰cm پایین می‌آید پیدا کنید. این مسئله را با استفاده از اصل پایستگی انرژی حل کنید. (ب) قسمت (الف) را با $R = ۵/۰cm$ دوباره حل کنید.

حل: از پایستگی انرژی کل استفاده می‌کنیم

$$E_i = E_f \Rightarrow mgh = \frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}I\omega^۲$$

$$I = \frac{۱}{۲}MR^۲$$

از طرفی داریم $\omega = \frac{v}{R}$ پس

$$mgh = \frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}\frac{۱}{۲}MR^۲\frac{v^۲}{R^۲}$$

$$mgh = \frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۴}Mv^۲ \Rightarrow mgh = v^۲\left(\frac{۲m+M}{۴}\right)$$

$$v^۲ = \frac{۴mgh}{۲m+M} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{۴\times۵۰\times۱۰^{-۳}\times۹/۸\times۰/۵}{۲\times۵۰\times۱۰^{-۳}+۰/۴}} = ۱/۴m/s$$

(ب) ملاحظه می‌شود که در جواب نهایی، R شعاع حلقه ظاهر نمی‌شود.

۶۱•- میل لنگ اتومبیلی، وقتی با تندی زاویه‌ای ۱۸۰۰rev/min بچرخد انرژی را با آهنگ ۱۰۰hp (۷۴/۶kW) از موتور به محورها انتقال می‌دهد. چه گشتاور نیرویی (برحسب نیوتون- متر) توسط میل لنگ منتقل شده است؟

حل: از طریق تشابه با حرکت خطی داریم:

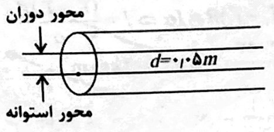
$$P_{لحظه‌ای} = \tau\omega$$

$$\omega = ۱۸۰۰\ rev/min = ۱۸۰۰ \times \frac{۲\pi}{۶۰} = ۱۸۸/۴\ rad/s$$

$$\tau = \frac{P}{\omega} = \frac{۷۴/۶\times۱۰^۳}{۱۸۸/۴} = ۳۹۶/۸\ N\cdot m$$

۶۲••- استوانهٔ یکنواختی به شعاع ۱۰cm و جرم ۲۰kg طوری قرار داده شده است که می‌تواند آزادانه حول محوری افقی که موازی و به فاصلهٔ ۵/۰cm از محور طولی مرکزی استوانه قرار دارد بچرخد. (الف) لختی چرخشی استوانه نسبت به محور چرخش چقدر است؟ (ب) اگر استوانه از حال سکون طوری رها شود که محور طولی مرکزی آن با محور چرخش هم ارتفاع باشد تندی زاویه‌ای استوانه وقتی از پایینترین مکان عبور می‌کند چقدر است؟

حل: (الف) از قضیهٔ محورهای موازی استفاده می‌کنیم:



$$I = I_C + Mh^۲$$

$$I = \frac{۱}{۲}MR^۲ + Mh^۲ = ۲۰ \times \left[\frac{۱}{۲}(۰/۱)^۲ + (۰/۰۵)^۲\right] = ۰/۱۵\ kg\cdot m^۲$$

(ب) از بقای انرژی استفاده می‌کنیم و تغییر ارتفاع را برای مرکز جرم در نظر می‌گیریم:

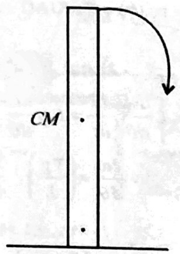
$$E_۱ = E_۲$$

$$\frac{۱}{۲}I\omega^۲ = mgh \Rightarrow \omega^۲ = \frac{۲mgh}{I}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{۲\times۲۰\times۹/۸\times۰/۰۵}{۰/۱۵}} = ۱۱/۴۳rad/s$$

۶۳••- یک سر خط‌کشی را روی زمین گذاشته و آن را به طور قائم نگه می‌داریم و سپس رها می‌کنیم تا بیفتد. تندی انتهای دیگر آن را درست در لحظهٔ پیش از اصابت به زمین، با فرض اینکه انتهای آن روی کف نلغزد پیدا کنید. (*راهنمایی:* خط‌کش را یک میله نازک فرض و از اصل پایستگی انرژی استفاده کنید). ILW SSM

حل: از پایستگی انرژی برای یافتن سرعت زاویه‌ای هنگام برخورد با زمین استفاده می‌کنیم و تغییر ارتفاع مرکز جرم را در نظر می‌گیریم:



$$E_۱ = E_۲$$

$I = \frac{۱}{۳}ml^۲$

$$mgh = \frac{۱}{۲}I\omega^۲$$

$$mg\frac{l}{۲} = \frac{۱}{۲}\frac{۱}{۳}ml^۲\omega^۲$$

$$\omega^۲ = \frac{۳g}{l} \Rightarrow \omega = \sqrt{۳g/l}$$

پس، تندی انتهای خط‌کش برابر است با:

$$v = \omega l = \sqrt{۳gl} = \sqrt{۳\times۹/۸\times۱} = ۵/۴۲m/s$$

۶۴••- در شکل ۱۰-۳۴ سه جسم به جرم ۰/۰۱۰۰kg که به میله‌ای به طول $L = ۶/۰۰cm$ و جرم ناچیز چسبیده‌اند می‌توانند به دور محوری که از نقطهٔ O در یک انتهای میله می‌گذرد بچرخند. چه مقدار کار لازم است تا آهنگ چرخش را (الف) از صفر تا ۲۰/۰rad/s، (ب) از ۲۰/۰rad/s تا ۴۰/۰rad/s و (پ) از ۴۰/۰rad/s تا ۶۰/۰rad/s تغییر دهد؟ (ت) شیب خط تغییرات انرژی جنبشی مجموعه (برحسب ژول) نسبت به مجذور آهنگ چرخش (برحسب مجذور رادیان بر مجذور ثانیه) چقدر است؟

حل: (الف) طبق قضیهٔ کار- انرژی جنبشی، این میزان کار برابر است با تغییرات انرژی جنبشی

$$W = \Delta K \qquad \Delta K = K_f - K_i$$

$$K = \frac{۱}{۲}I\omega^۲$$

$$I = \sum_i m_i r_i^۲ = m_۱d^۲ + m_۲(۲d)^۲ + m_۳(۳d)^۲ = ۱۴md^۲$$

$$I = ۱۴\times۰/۰۱\times(۰/۰۲)^۲ = ۵/۶\times۱۰^{-۵}\ kg\cdot m^۲$$

$$K_i = ۰$$

$$K_f = \frac{۱}{۲}\times۵/۶\times۱۰^{-۵}\ (۲۰)^۲ = ۱۱/۲\times۱۰^{-۳}\ J$$

$$W = ۱۱/۲\times۱۰^{-۳}\ J$$

(ب)

$$W = \Delta k = \frac{۱}{۲}I(\omega_f^۲ - \omega_i^۲)$$

$$= \frac{۱}{۲}\times(۵/۶\times۱۰^{-۵})((۴۰)^۲ - (۲۰)^۲) = ۳۳/۶\times۱۰^{-۳}J$$

(پ)

$$W = \frac{۱}{۲}۵/۶\times۱۰^{-۵}\ ((۶۰)^۲ - (۴۰)^۲) = ۵۶\times۱۰^{-۳}\ J$$

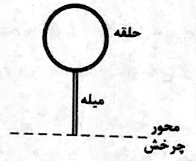
(ت)

$$\frac{dK}{d(\omega^۲)} = \frac{۱}{۲}I \qquad K = \frac{۱}{۲}I\omega^۲$$

شیب برابر با $\frac{۱}{۲}I$ است.

$$\frac{dk}{d(\omega^۲)} = ۲/۸\times۱۰^{-۵}\ kg\cdot m^۲$$

۶۵•••- شکل ۱۰-۴۷ مجموعهٔ صلبی شامل یک حلقهٔ نازک (به جرم m و شعاع $R = ۰/۱۵m$) و میلهٔ شعاعی نازکی (به جرم m و طول $L = ۲/۰۰R$) را نشان می‌دهد. این مجموعه به حالت قائم است، اما اگر ضربهٔ کوچکی به آن وارد کنیم می‌تواند حول محوری افقی در صفحهٔ میله و حلقه از انتهای پایین آن بچرخد. فرض کنید انرژی داده شده به این مجموعه در ضربهٔ اولیه ناچیز باشد، تندی زاویه‌ای این مجموعه حول محور چرخش وقتی از سمتگیری معکوس می‌گذرد چقدر است؟ GO



شکل ۱۰-۴۷ مسئلهٔ ۶۵

حل: ابتدا مرکز جرم را می‌یابیم:

$$y_c = \frac{۱}{M}\sum_i m_i g_i \Rightarrow y_c = \frac{mR + ۳mR}{۲m} = ۲R$$

از پایستگی انرژی جنبشی داریم:

$$E_۱ = E_۲$$

$$۲mg\,y_c = -۲mg\,y_c + \frac{۱}{۲}I\omega^۲$$

$$\frac{۱}{۲}I\omega^۲ = ۴mg\,y_c \Rightarrow \omega^۲ = \frac{۸mg\,y_c}{I}$$

از قضیهٔ محورهای موازی برای یافتن گشتاور لختی حلقه حول محور دوران استفاده می‌کنیم:

$$I_{حلقه} = I_C + Mh^۲ = \frac{۱}{۲}mR^۲ + m(R+۲R)^۲$$

$$I_{حلقه} = \frac{۱}{۲}(۰/۱۵)^۲m + ۹\times(۰/۱۵)^۲m = ۰/۲۱۴m$$

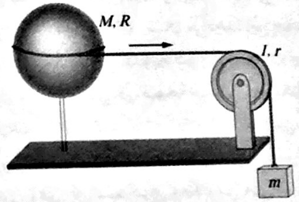
گشتاور لختی کل سیستم نسبت به محور دوران برابر است با:

$$I = ۰/۲۱۴\,m + \frac{۱}{۳}m(۰/۳)^۲ = ۰/۲۴۴m$$

جایگذاری می‌کنیم:

$$\omega^۲ = \frac{۸mgy_c}{۰/۲۴۴m} = \frac{۸\times۹/۸\times۲\times۰/۱۵}{۰/۲۴۴} \Rightarrow \omega = ۹/۸۲rad/s$$

۶۶●●●- پوستهٔ کروی یکنواختی به جرم $M=4/5\,\text{kg}$ و شعاع $R=8/5\,\text{cm}$ می‌تواند حول محوری قائم که روی یاتاقان بدون اصطکاکی (شکل ۱۰-۴۸) قرار دارد بچرخد. ریسمان بدون جرمی به دور استوای پوستهٔ کروی پیچیده شده و پس از عبور از روی قرقره‌ای با لختی چرخشی $I=3/0\times10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ و شعاع $r=5/0\,\text{cm}$ به جسم کوچکی به جرم $m=0/60\,\text{kg}$ متصل شده است. محور قرقره اصطکاک ندارد و ریسمان روی قرقره نمی‌لغزد. تندی جسم را وقتی به اندازهٔ ۸۲cm از حالت سکون پایین آمد به دست آورید. از پایستگی انرژی استفاده کنید.



شکل ۱۰-۴۸ مسئلهٔ ۶۶

حل: $E_1=E_2\Rightarrow mgh=\frac{1}{2}I_1\omega_1^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2^2+\frac{1}{2}mv^2$

ω_2 تندی زاویه‌ای قرقره و ω_1 تندی زاویه‌ای کره است.

$\omega_1=\frac{v}{R}\qquad\omega_2=\frac{v}{r}$

$$mgh=\frac{1}{2}\frac{2}{3}MR^2\frac{v^2}{R^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}I_2\frac{v^2}{r^2}+\frac{1}{2}mv^2$$

$$mgh=\frac{1}{5}Mv^2+\frac{1}{4}\frac{I_2}{r^2}v^2+\frac{1}{2}mv^2$$

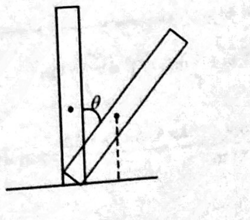
$$0/6\times9/8\times0/82=\left(\frac{1}{5}\times4/5+\frac{1}{4}\frac{3\times10^{-3}}{25\times10^{-4}}+\frac{1}{2}\times0/6\right)v^2$$

$v=1/42\,\text{m/s}$

۶۷●●●- یک دودکش استوانه‌ای بلند از پایه شکسته می‌شود و به زمین سقوط می‌کند. دودکش را به صورت میله‌ای نازک به طول ۵۵/۰m در نظر بگیرید. در لحظه‌ای که دودکش با محور قائم زاویهٔ ۳۵/۰° دارد، (الف) تندی زاویه‌ای و (ب) شتاب شعاعی نوک آن و (پ) شتاب مماسی نوک دودکش چقدر است؟ (*راهنمایی:* از پایستگی انرژی استفاده کنید، نه از گشتاور نیرو). (ت) در چه زاویهٔ θ شتاب مماسی برابر g خواهد بود؟

حل: (الف)

$E_1=E_2$



$$mg\frac{L}{2}=mg\frac{L}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}I\omega^2\qquad I=\frac{1}{3}mL^2$$

$$\frac{1}{2}mgL(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}\frac{1}{3}mL^2\omega^2$$

$$\omega^2=\frac{3g}{L}(1-\cos\theta)\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{3\times9/8}{55}(1-\cos(35°))}$$

$=0/31\,\text{rad/s}$

(ب) شتاب شعاعی نوک دودکش برابر است با:

$$a_R=L\omega^2=3g(1-\cos\theta)=3\times9/8(1-\cos(35°))$$
$=5/32\,\text{m/s}^2$

(پ) از مشتق‌گیری زنجیری استفاده می‌کنیم.

$$a_T=L\alpha=L\frac{d\omega}{dt}=L\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=L\omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

$$\omega=\left(\frac{3g}{L}(1-\cos\theta)\right)^{1/2}\Rightarrow\frac{d\omega}{d\theta}=\left(\frac{3g}{L}\right)^{1/2}\frac{1}{2}\sin\theta(1-\cos\theta)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow a_T=L\left(\frac{3g}{L}\right)^{1/2}(1-\cos\theta)^{1/2}\left(\frac{3g}{L}\right)^{1/2}\frac{1}{2}\sin\theta(1-\cos\theta)^{-1/2}$$

$$a_T=\frac{3g}{2}\sin\theta\Rightarrow a_T(\theta=35°)=\frac{3}{2}(9/8)\sin(35°)$$
$=8/43\,\text{m/s}^2$

(ت) $a_T=g\Rightarrow\frac{3}{2}g\sin\theta=g\Rightarrow\sin\theta=\frac{2}{3}\Rightarrow\theta=41/8°$

۶۸- جورج واشنگتن گیل فریس پسر[1]، فارغ التحصیل مهندسی راه و ساختمان از مؤسسهٔ پلی تکنیک رنسلر نخستین چرخ فریس را برای نمایشگاه جهانی کلمبیا در شیکاگو در ۱۸۹۳/۱۲۷۲ ساخت. این چرخ که ساختار مهندسی مبهوت کننده‌ای در آن زمان داشت شامل ۳۶ واگن چوبی بود که هر یک گنجایش تا ۶۰ مسافر را داشتند و به دور دایره‌ای به قطر ۷۶m می‌چرخیدند. واگن‌ها از ردیف‌های ۶ نفره پر می‌شد و جرم هر واگن ۳۰۰kg بود و وقتی هر ۳۶ واگن پر می‌شد چرخ با تندی زاویه‌ای ثابت در حدود ۲ دقیقه یک دور کامل می‌زد. مقدار کاری که این ماشین لازم دارد تا فقط مسافرین را بچرخاند برآورد کنید.

حل:

$W=\Delta K=\frac{1}{2}I\omega^2$

جرم هر مسافر را ۶۰ kg می‌گیریم.

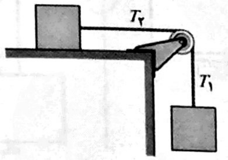
$$I=(N_1m_1+N_2m_2)R^2=[(36\times60)(60)+(36\times300)](38)^2$$
$=2/027\times10^8\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2\times60}=5/23\times10^{-2}\,\text{rad/s}$$

$$W=\frac{1}{2}\times2/027\times10^8\times(5/23\times10^{-2})^2=2/77\times10^5\,\text{J}$$

۶۹- در شکل ۱۰-۴۹ دو قطعه به جرم ۶/۲۰kg با نخ بدون جرمی که از روی قرقره‌ای به شعاع ۲/۴۰ cm می‌گذرد به هم متصل‌اند. لختی چرخشی قرقره برابر $7/40\times10^{-4}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ است. این نخ هیچ لغزشی روی قرقره ندارد؛ ولی معلوم نیست که بین میز و جسم لغزنده اصطکاک وجود دارد یا خیر؛ محور قرقره نیز بدون اصطکاک است. وقتی این دستگاه از حال سکون رها شود، قرقره در مدت ۹۱/۰ ms به اندازهٔ ۱/۳۰rad می‌چرخد و شتاب دو جسم ثابت است. (الف) بزرگی شتاب زاویه‌ای قرقره چقدر است؟ (ب) بزرگی شتاب هر یک از دو جسم را به دست آورید. (پ) کشش نخ T_1 چقدر است؟ (ت) کشش نخ T_2 چقدر است؟ SSM

1. George Washington Gale Ferris,Jr.



شکل ۱۰-۴۹ مسئلهٔ ۶۹

حل: (الف) داریم:

$$\theta=\frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\alpha=\frac{2\theta}{t^2}=\frac{2\times1/3}{(91\times10^{-3})^2}=313/25\,\text{rad/s}^2$$

(ب) شتاب دو جسم با یکدیگر برابر است.

$a=R\alpha\Rightarrow a=0/024\times313/25=7/52\,\text{m/s}^2$

(پ) $mg-T_1=ma\Rightarrow T_1=m(g-a)$

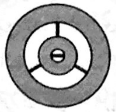
$T_1=6/2\times(9/8-7/52)=14/14\,\text{N}$

(ت) برآیند دو نیروی T_1 و T_2 به قرقره گشتاور $I\alpha$ وارد می‌کند.

$$(T_1-T_2)R=I\alpha\Rightarrow T_2=T_1-\frac{I\alpha}{R}$$

$$T_2=14/14-\frac{7/4\times10^{-4}\times313/25}{0/024}=4/48\,\text{N}$$

۷۰- شکل ۱۰-۵۰ ساختار تختی شامل دو حلقهٔ هم مرکز را نشان می‌دهد که توسط سه میله با جرمهای ناچیز به هم متصل‌اند. این ساختار، که در ابتدا ساکن است، می‌توانند حول مرکز مشترکشان که یک میلهٔ دیگر به جرم ناچیز دارد بچرخند (مثل چرخ و فلک). جرم، شعاع داخلی و شعاع خارجی حلقه‌ها در جدول زیر داده شده‌اند. یک نیروی مماسی به بزرگی ۱۲/۰ N به مدت ۰/۳۰۰ s به لبهٔ بیرونی حلقهٔ خارجی وارد می‌شود. تغییر در تندی زاویه‌ای این ساختار را در طی این بازهٔ زمانی به دست آورید.


شکل ۱۰-۵۰ مسئلهٔ ۷۰

حلقه	جرم (kg)	شعاع داخلی (m)	شعاع خارجی (m)
۱	۰/۱۲۰	۰/۰۱۶۰	۰/۰۴۵۰
۲	۰/۲۴۰	۰/۰۹۰۰	۰/۱۴۰۰

حل:

$$I_1=\frac{1}{2}m_1(R_2^2+R_1^2)$$

$$I_1=\frac{1}{2}\times0/12\times((0/045)^2+(0/016))^2$$

$I_1=1/3\times10^{-4}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$

$$I_2=\frac{1}{2}m_2(R_2^2+R_1^2)$$

$$I_2=\frac{1}{2}\times0/24((0/14)^2+(0/09)^2)=33\times10^{-4}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

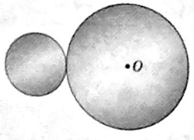
$I=I_1+I_2=34/3\times10^{-4}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$

اکنون جایگذاری را انجام می‌دهیم.

$$rF=I\alpha\Rightarrow rF=I\frac{d\omega}{dt}\Rightarrow d\omega=\frac{rF}{I}dt$$

$$\omega=\frac{rF}{I}t\Rightarrow\omega=\frac{0/14}{3/43\times10^{-3}}\times12\times0/3=146/94\,\text{rad/s}$$

۷۱- در شکل ۱۰-۵۱ قرص کوچکی به شعاع $r=2/00\,\text{cm}$ به لبهٔ قرص بزرگتری به شعاع $R=4/00\,\text{cm}$ چسبیده است به طوری که قرصها می‌توانند به دور محوری عمود که از نقطهٔ O مرکز قرص بزرگتر می‌گذرد بچرخند. این قرصها هم دارای چگالی (جرم یکای حجم) یکنواخت $1/40\times10^3\,\text{kg/m}^3$ و هم ضخامت یکنواخت ۵/۰۰ mm هستند. لختی چرخشی این مجموعهٔ دو-قرص حول محور چرخشی که از نقطهٔ O می‌گذرد چقدر است؟



شکل ۱۰-۵۱ مسئلهٔ ۷۱

حل: لختی چرخشی قرص بزرگتر حول O برابر است با

$$I_1=\frac{1}{2}MR^2$$

$$I_1=\frac{1}{2}\rho\pi R^2hR^2=\frac{1}{2}\rho\pi hR^4$$

$$I_1=\frac{1}{2}\times1/4\times10^3\times3/14\times5\times10^{-3}(4\times10^{-2})^4$$
$=2/816\times10^{-5}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$

گشتاور لختی قرص کوچکتر حول O را با استفاده از قضیهٔ محورهای موازی می‌یابیم:

$$I_2=I_C+ML^2\Rightarrow I_2=\frac{1}{2}\rho\pi hr^4+\rho\pi hr^2(R+r)^2$$
$=3/35\times10^{-5}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$

پس، گشتاور لختی کل برابر است با:

$$I = I_1 + I_2 = 6.166\times10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

۷۲- در ساعت ۷:۱۴ صبح روز ۳۰ ژوئن سال ۱۹۰۸/۱۲۸۷ انفجار مهیبی برفراز نقطهٔ دوری از سیبری مرکزی در عرض جغرافیایی ۶۱°N و ۱۰۲°E رخ داد؛ در نتیجهٔ آن گوی آتشین ایجاد شده دارای روشنترین درخشش بود که قبل از سلاحهای هسته‌ای دیده شده بود. رویداد تونگوسکا[1] که بر اساس اظهار یک شاهد عینی «بخش عظیمی از آسمان را پوشانیده بود» احتمالاً در نتیجه انفجار یک *سیارک سنگی* به پهنای حدود ۱۴۰m بوده است. (الف) با فرض اینکه زمین فقط در حال چرخش است، تعیین کنید که چه مدت بعد از آن این سیارک می‌توانست انفجاری را بر فراز هلسینکی در طول جغرافیایی ۲۵°E ایجاد کند. این انفجار باعث از بین رفتن کامل این شهر می‌شد. (ب) اگر این سیارک یک *سیارک فلزی* می‌بود می‌توانست به سطح زمین برسد. چه مدت طول می‌کشید تا سیارک با اقیانوس اطلس در طول جغرافیایی ۲۰°E برخورد کند؟ (در نتیجهٔ این برخورد آبلرزهٔ حاصل می‌توانست کل تمدن موجود در دو طرف اقیانوس اطلس را نابود کند.) [redacted]

حل: (الف) اختلاف زاویه‌ای بین دو قطعه عبارت است از:

$$\Delta\theta = 102^\circ - 25^\circ = 77^\circ$$
$$\Delta\theta = 77\times\frac{\pi}{180} = 1.34\ \text{rad}$$

سرعت زاویه‌ای زمین برابر است با:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times3.14}{24\times3600} = 7.269\times10^{-5}\ \text{rad/s}$$
$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{1.34}{7.269\times10^{-5}} = 18434.44\,\text{s}$$

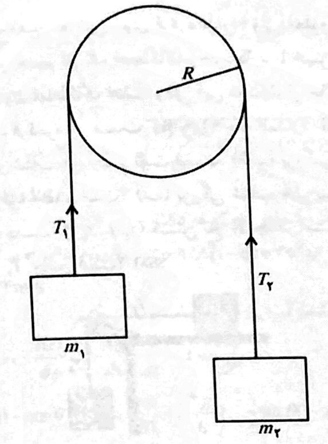
(ب)
$$\Delta\theta = 102^\circ - (-20^\circ) = 122^\circ$$
$$\Delta\theta = 2.13\ \text{rad}$$
$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = 29302.51\ \text{s}$$

۷۳- در شکل ۱۰-۴۵ دو قطعه به جرم $m_1 = 400\text{g}$ و $m_2 = 600\text{g}$ با ریسمان بدون جرمی به دور یک قرص یکنواخت به جرم $M = 500\text{g}$ و شعاع $R = 12.0\text{cm}$ پیچیده شده است. قرص می‌تواند بدون اصطکاک حول یک محور افقی که از مرکزش می‌گذرد بچرخد؛ ریسمان روی قرص لغزش ندارد. این مجموعه را از حال سکون رها می‌کنیم. مطلوب است (الف) بزرگی شتاب دو جسم؛ (ب) کشش T_1 در ریسمان سمت چپ و (پ) کشش T_2 در ریسمان سمت راست.

حل: برای گشتاور داریم:

$$(T_2 - T_1)R = I\alpha$$

1. Tunguska



از طرفی داریم:

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$
$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \qquad a_1 = a_2 = a$$
$$T_1 - T_2 + m_2 g - m_1 g = (m_1 + m_2)a$$
$$\Rightarrow T_2 - T_1 = g(m_2 - m_1) - a(m_1 + m_2)$$

$T_2 - T_1$ را در فرمول گشتاور جایگذاری می‌کنیم:

$$gR(m_2 - m_1) - aR(m_1 + m_2) = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$
$$g(m_2 - m_1) - a(m_1 + m_2) = \frac{1}{2}MR\alpha$$
$$R\alpha = a$$
$$g(m_2 - m_1) = a(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M)$$
$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}g$$
$$a = \frac{0.6 - 0.4}{0.6 + 0.4 + \frac{1}{2}0.5}9.8 = 1.57\,\text{m/s}^2$$

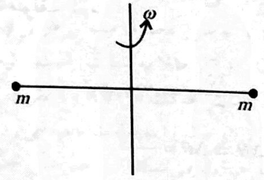
(ب) $T_1 = m_1(g + a) \Rightarrow T_1 = 0.4(9.8 + 1.57) = 4.55\,\text{N}$

(پ) $T_2 = m_2(g - a) \Rightarrow T_2 = 0.6(9.8 - 1.57) = 4.94\,\text{N}$

۷۴- دو گلولهٔ کوچک هر یک به جرم ۱/۰۶kg به دو انتهای یک میلهٔ فولادی نازک به طول ۱/۲۰m و جرم ۶/۴۰kg متصل شده‌اند. این میله مقید است که روی یک صفحهٔ افقی حول محور قائم که از وسط آن می‌گذرد بچرخد. در یک لحظهٔ معین، این میله با تندی ۳۹/۰rev/s می‌چرخد ولی به دلیل وجود اصطکاک این حرکت کند و در مدت ۳۲/۰ s متوقف می‌شود. با فرض وجود گشتاور نیروی ثابت کند کننده‌ای بر اثر اصطکاک، مطلوب است محاسبهٔ (الف) شتاب زاویه‌ای، (ب) گشتاور نیروی کند کننده، (پ) انرژی کل منتقل شده از انرژی مکانیکی به انرژی گرمایی توسط اصطکاک و (ت) تعداد دورهایی که در مدت ۳۲/۰s این جسم می‌چرخد. (ث) اکنون فرض کنید گشتاور نیروی کند کننده ثابت نباشد. هر یک از مقدارهای (الف)، (ب)، (پ) و (ت) را که هنوز با این داده‌ها می‌توان محاسبه کرد به دست آورید.

حل: (الف) ابتدا لختی دورانی را می‌یابیم:

$$I = \frac{1}{12}Ml^2 + m\frac{l^2}{4} + m\frac{l^2}{4}$$
$$I = \frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{2}ml^2$$



$$I = \left(\frac{1}{12}\times6.4 + \frac{1}{2}\times1.06\right)(1.2)^2 = 1.53\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$
$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$
$$\omega = 39\,\text{rev/s} = 39\times2\pi\,\text{rad/s} = 244.92\,\text{rad/s}$$
$$\alpha = -\frac{244.92}{32} = -7.65\ \text{rad/s}^2$$

(ب) $\tau = I\alpha = -1.53\times7.65 = -11.71\,\text{N}\cdot\text{m}$

(پ) بر طبق پایستگی انرژی، کل انرژی جنبشی اولیه به گرما تبدل می‌شود.

$$Q = |\Delta k| = \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}\times1.53\times(277.92)^2 = 4.59\times10^4\ \text{J}$$

(ت) از رابطهٔ مستقل از زمان استفاده می‌کنیم و $\Delta\theta$ می‌یابیم:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$$
$$\Delta\theta = \frac{-\omega_0^2}{2\alpha} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{-(244.92)^2}{-2\times7.65} = 3920.64\ \text{rad}$$

تعداد دور برابر است با $\frac{\Delta\theta}{2\pi}$ یا

$$\frac{3920.64}{2\times3.14} = 624.3$$

(ث) در این حالت تنها می‌توانیم انرژی کل منتقل شده از انرژی مکانیکی به گرمایی را بیابیم.

۷۵- تیغهٔ یکنواخت گردونهٔ یک بالگرد به طول ۷/۸۰m دارای جرمی برابر ۱۱۰kg است و به محور گردونه متصل شده است. (الف) وقتی گردونه با تندی ۳۲۰rev/min بچرخد بزرگی نیروی وارد بر این اتصال از طرف محور چقدر است؟ (*راهنمایی:* برای محاسبه تیغه را می‌توان به صورت یک جرم نقطه‌ای در مرکز آن فرض کرد، چرا؟) (ب) گشتاور نیرویی که باید به گردونه وارد شود تا آن را در مدت ۶/۷۰s به بیشترین تندی آن از حال سکون برساند چقدر است؟ از مقاومت هوا صرفنظر کنید. (در اینجا تیغه را نمی‌توان به صورت یک جرم نقطه‌ای در نظر گرفت، چرا؟ توزیع جرم را به صورت میلهٔ نازک یکنواخت

فرض کنید.) (پ) چه مقدار کار باید این گشتاور نیرو روی تیغه انجام دهد تا تندی آن را به ۳۲۰ rev/min برساند.

حل: (الف) $\omega = 320\frac{rev}{\min} = 320\times\frac{2\pi}{60} = 33.49\,\text{rad/s}$

نیروی خواسته شده، همان نیروی جانب مرکز است.

$$F_R = mR\omega^2 = 110\times\frac{7.8}{2}(33.49)^2 = 4.81\times10^5\ \text{N}$$

(ب)
$$\tau = I\alpha$$
$$I = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3}110\times(7.8)^2 = 2230.8$$
$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{33.49}{6.7} = 5\,\text{rad/s}^2$$

با جایگذاری بدست می‌آوریم: $\tau = 11154\,\text{N}\cdot\text{m}$

(پ) این مقدار کار برابر است با انرژی جنبشی

$$W = K = \frac{1}{2}I\omega^2$$
$$W = \frac{1}{2}\times2230.8\times(33.49)^2 = 1.3\times10^6\ \text{J}$$

۷۶- چرخی با شروع از حالت سکون، با شتاب زاویه‌ای ثابت ۲/۰۰rad/s² می‌چرخد. در بازهٔ زمانی ۳/۰۰s ، ۹۰/۰ rad می‌چرخد. (الف) سرعت زاویه‌ای چرخ در آغاز بازهٔ ۳/۰۰s چقدر است؟ (ب) پیش از شروع بازهٔ ۳/۰۰s چقدر می‌چرخد؟

حل: (الف) اگر فرض کنیم در آغازه بازهٔ ۳s ، سرعت زاویه‌ای ω_0 است، می‌توان نوشت:

$$\omega = at + \omega_0$$
$$\omega = 2\times3 + \omega_0 = 6 + \omega_0$$

از رابطهٔ مستقل از زمان داریم:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$$
$$(6 + \omega_0)^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$$
$$12\omega_0 = 2\times2\times90 - 36 \Rightarrow \omega_0 = 27\,\text{rad/s}$$

(ب) دوباره از رابطهٔ مستقل از زمان استفاده می‌کنیم:

$$\omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{\omega_0^2}{2\alpha}$$
$$\Delta\theta = \frac{(27)^2}{2\times4} = 182.25\,\text{rad}$$

تعداد دور برابر است با $\frac{\Delta\theta}{2\pi}$ یا ۲۹ دور است.

۷۷- یک توپ گلف را با زاویهٔ ۲۰° نسبت به افق با تندی ۶۰ m/s و آهنگ چرخش ۹۰rad/s پرتاب می‌کنیم. با صرفنظر کردن از مقاومت هوا تعیین کنید که این توپ چند دور در یکای زمان باید بچرخد تا به ارتفاع بیشینه‌اش برسد.

حل: زمانی که طول می‌کشد تا توپ به اوج برسد برابر است با:

$$t = \frac{v_0\sin\theta}{g}$$
$$t = \frac{60\sin(20^\circ)}{9.8} = 2.09\,\text{s}$$

$\Delta\theta=\omega t\Rightarrow\Delta\theta=۹۰(۲/۰۹)=۱۸۸/۱\ \text{rad}$

تعداد دور برابر است با $\frac{\Delta\theta}{۲\pi}$ یا ۲۹/۹۵rev

۷۸- دو کرهٔ توپر یکنواخت با جرم یکسان ۱/۶۵ kg دارای شعاعهای ۰/۲۲۶ m و ۰/۸۵۴m هستند. هر کره می‌تواند حول محوری که از مرکزش می گذرد بچرخد. (الف) بزرگی τ گشتاور نیروی لازم برای رساندن کره کوچکتر از حال سکون به تندی زاویه‌ای ۳۱۷ rad/s در مدت ۱۵/۵s چقدر است؟ (ب) بزرگی نیرویی که باید به طور مماسی به خط استوای کره وارد کرد تا این گشتاور نیرو را ایجاد کند چقدر است؟ مقدارهای متناظر را برای (پ) گشتاور نیروی τ و (ت) نیروی F، برای کرهٔ بزرگتر به دست آورید.

حل: (الف)

$\tau=I\alpha$

$I=\frac{۲}{۵}mR^۲\Rightarrow I=\frac{۲}{۵}(۱/۶۵)(۰/۲۲۶)^۲=۰/۰۳۴\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲$

$\alpha=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{۳۱۷}{۱۵/۵}=۲۰/۴۵\,\text{rad/s}^۲$

$\tau=۰/۷\,\text{N}\cdot\text{m}$

با جایگذاری بدست می‌آوریم:

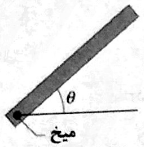
(ب) $\tau=RF\Rightarrow F=\frac{\tau}{R}\Rightarrow F=\frac{۰/۷}{۰/۲۲۶}=۳/۱\,\text{N}$

(پ) $I=\frac{۲}{۵}\times۱/۶۵(۰/۸۵۴)^۲=۰/۴۸\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲$

$\tau=I\alpha\Rightarrow\tau=۰/۴۸\times۲۰/۴۵=۹/۸۲\,\text{N}\cdot\text{m}$

(ت) $\tau=RF\Rightarrow F=\frac{۹/۸۲}{۰/۸۵۴}=۱۱/۵\,\text{N}$

۷۹- میلهٔ نازک و یکنواخت در شکل ۱۰-۵۲ دارای طول ۲/۰m است و می‌تواند حول یک میخ افقی که از یک انتهای آن می‌گذرد بچرخد. میله را از حال سکون با زاویهٔ $\theta=۴۰°$ بالای افق رها می‌کنیم. با استفاده از اصل پایستگی انرژی تندی زاویه‌ای میله را وقتی از وضعیت افقی می‌گذرد به دست آورید.



شکل ۱۰-۵۲ مسئلهٔ ۷۹

حل:

$E_۱=E_۲\Rightarrow mgh=\frac{۱}{۲}I\omega^۲$

$h=\frac{L}{۲}\sin\theta$

$I=\frac{۱}{۳}mL^۲$

با جایگذاری بدست می‌آوریم:

$\omega^۲=۳\frac{g}{L}\sin\theta$

$\omega=\sqrt{۳\times\frac{۹/۸}{۲}\sin(۲۰°)}=۳/۱\ \text{rad/s}$

۸۰- چرخ لنگر یک موتور با تندی ۲۵/۰rad/s می‌چرخد. وقتی موتور را خاموش کنیم چرخ لنگر با آهنگ ثابتی کند می‌شود و در مدت ۲۰/۰s می‌ایستد. مطلوب است محاسبهٔ (الف) شتاب زاویه‌ای چرخ لنگر، (ب) زاویه‌ای که این چرخ طی کرده است تا متوقف شود و (پ) تعداد دورهایی که این چرخ می‌زند تا متوقف شود.

حل: (الف)

$\alpha=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\Rightarrow\alpha=-\frac{۲۵}{۲۰}=-۱/۲۵\,\text{rad/s}^۲$

(ب) $\omega^۲-\omega_۰^۲=۲\alpha\Delta\theta\Rightarrow\Delta\theta=\frac{-\omega_۰^۲}{۲\alpha}$

$\Delta\theta=-\frac{(۲۵)^۲}{-۲\times۱/۲۵}=۲۵۰\,\text{rad}$

(پ) $N=\frac{\Delta\theta}{۲\pi}=۳۹/۸$ دور

۸۱- گلولهٔ کوچکی به جرم ۱/۳۰kg را به یک انتهای میله‌ای به طول ۰/۷۸۰m و جرم نا چیز متصل کرده‌ایم. این دستگاه در یک دایرهٔ افقی حول انتهای دیگر آن با تندی ۵۰۱۰ rev/min می‌چرخد. (الف) لختی چرخشی این دستگاه حول محور چرخشی چقدر است؟ (ب) اگر مقاومت هوا برابر $۲/۳۰\times۱۰^{-۲}$ N به گلوله در جهت مخالف حرکتش وارد شود، چه گشتاور نیرویی باید به این دستگاه وارد کرد تا تندی زاویه‌ای آن ثابت بماند؟

حل: (الف) $I=mr^۲\Rightarrow I=۱/۳\times(۰/۷۸)^۲=۰/۷۹\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲$

(ب) برای آنکه تندی زاویه‌ای آن ثابت باشد، باید گشتاور نیروی مقاومت هوا، با گشتاور نیروی اعمال ما برابر باشد.

$\tau=rF\Rightarrow\tau=۰/۷۸\times۲/۳\times۱۰^{-۲}=۱/۷۹\times۱۰^{-۲}\,\text{N}\cdot\text{m}$

۸۲- با شروع از $t=۰s$ ، چرخی با شتاب زاویه‌ای ثابت از حال سکون شروع به چرخش می‌کند. در لحظهٔ $t=۲/۰s$ سرعت زاویه‌ای چرخ برابر ۵/۰rad/s است. شتاب به مدت $t=۲۰s$ ادامه می‌یابد و سپس به طور ناگهانی قطع می‌شود. این چرخ در بازهٔ زمانی از $t=۰$ تا $t=۴۰s$ چه زاویه‌ای می‌چرخد؟

حل: ابتدا شتاب زاویه‌ای چرخ را در بازهٔ صفر تا ۲s بدست می‌آوریم:

$\alpha=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{۵}{۲}=۲/۵\,\text{rad/s}^۲$

سرعت زاویه‌ای را در $t=۲۰s$ حساب می‌کنیم:

$\omega=\alpha t\Rightarrow\omega=۲/۵\times۲۰=۵۰\,\text{rad/s}^۲$

زاویه چرخش از $t=۰s$ تا $t=۲۰s$ را حساب می‌کنیم:

$\omega^۲-\omega_۰^۲=۲\alpha\Delta\theta_۱\Rightarrow\Delta\theta_۱=\frac{\omega^۲}{۲\alpha}$

$\Delta\theta_۱=\frac{(۵۰)^۲}{۲\times۲/۵}=۵۰۰\,\text{rad}$

در $t\geq۲۰s$ چرخش با سرعت زاویه‌ای ثابت ۵۰rad/s صورت می‌گیرد.

$\Delta\theta_۲=\omega\Delta t\Rightarrow\Delta\theta_۲=۵۰\times۲۰=۱۰۰۰\,\text{rad}$

پس زاویهٔ کل چرخش برابر است با:

$\Delta\theta=\Delta\theta_۱+\Delta\theta_۲=۱۵۰۰\,\text{rad}$

۸۳- بندبازی تلاش می‌کند که مرکز جرم خود را روی سیم (یا طناب) نگهدارد. او به طور معمول میله‌ای طویل و سنگین را با خود حمل می‌کند. او اگر مثلاً به سمت راست تکیه دهد (مرکز جرم او به طرف راست حرکت می‌کند) و خطر چرخش نسبت به سیم وجود دارد، او میله را به سمت چپ می‌برد (مرکز جرم او به سمت چپ حرکت می‌کند) تا چرخش خود را کند و بدین وسیله تعادل خود را تنظیم کند. فرض کنید جرم بندباز ۷۰/۰kg و لختی چرخشی او نسبت به سیم $۱۵/۰\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲$ است. اگر او ۵/۰cm روی سیم به سمت راست برود، و (الف) میله را حمل نکند و (ب) میله با جرم ۱۴/۰kg از سمت چپ سیم ۱۰cm فاصله داشته باشد، شتاب زاویه‌ای او چقدر است؟

حل: (الف) در این حالت نیروی وزن، گشتاور نیرو ایجاد می‌کند.

$\tau=rF$ و $\tau=I\alpha$

$rF=I\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{rF}{I}\Rightarrow\alpha=\frac{rmg}{I}$

$\alpha=\frac{۰/۰۵\times۷۰\times۹/۸}{۱۵}=۲/۲۹\,\text{rad/s}^۲$

(ب) در این حالت، میله گشتاور نیرویی، خلاف گشتاور نیروی وزن بندباز اعمال می‌کند.

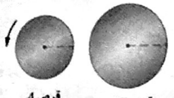
$r_۱F_۱-r_۲F_۲=I\alpha$

$\alpha=\frac{r_۱F_۱-r_۲F_۲}{I}$

$\Rightarrow\alpha=\frac{۰/۱\times۱۴\times۹/۸-۰/۰۵\times۷۰\times۹/۸}{۱۵}=-۱/۳۷\,\text{rad/s}^۲$

$F_۱$ نیروی وزن میله و $F_۲$ ، نیروی وزت بند باز است.

۸۴- مسابقهٔ *قرصها مسابقه*. شکل ۱۰-۵۳ دو قرص را نشان می‌دهد که می‌توانند حول مرکزشان همانند یک چرخ و فلک بچرخند. در لحظهٔ $t=۰$ خطهای مرجع این دو قرص دارای یک ستمگیری هستند. قرص A با سرعت زاویه‌ای ثابت ۹/۵rad/s می‌چرخد. قرص B ساکن است اما اکنون با شتاب زاویه‌ای ثابت $۲/۲\,\text{rad/s}^۲$ شروع به چرخش می‌کند. (الف) در چه زمان t خطهای مرجع این دو قرص به طور لحظه‌ای جابه‌جایی زاویه‌ای یکسان θ خواهند داشت؟ آیا این زمان t اولین زمانی پس از $t=۰$ است که خطهای مرجع به طور لحظه‌ای در یک راستا قرار می‌گیرند؟



شکل ۱۰-۵۳ مسئلهٔ ۸۴

حل: (الف)

$\theta_A=\omega_At$

$\theta_B=\frac{۱}{۲}\alpha_Bt^۲$

در این حالت باید داشته باشیم $\theta_A=\theta_B$

$\omega_At=\frac{۱}{۲}\alpha_Bt^۲\Rightarrow\omega_A=\frac{۱}{۲}\alpha_Bt\Rightarrow t=\frac{۲\omega_A}{\alpha_B}$

$t=\frac{۲\times۹/۵}{۲/۲}=۸/۶۴s$

(ب) برای اینکه خطهای مرجع به طور لحظه‌ای در یک راستا قرار بگیرید باید داشته باشیم:

$\theta_A-\theta_B=۲N\pi$

$۹/۵t-\frac{۱}{۲}۲/۲t^۲=۲N\pi$

$t=\frac{۱}{۲/۲}\left(۹/۵\pm\sqrt{(۹/۵)^۲-۹N\pi(۱/۱)^۲}\right)$

ملاحظه می‌شود که به ازای $N=۰,۱,۲,...$ زمان گوناگون بدست می‌آید. برای آنکه زیر رادیکال مثبت باشد باید داشته باشیم:

$۹۰/۲۵-۳۰/۳۹N\geq۰$

$N\leq۳$

۸۵- دوچرخه سواری به جرم ۷۰ kg همهٔ جرم خود را روی هر یک از رکابهای پایین رونده وارد می‌آورد تا از جاده شیبداری بالا رود. فرض کنید قطر دایره‌ای که رکابها می‌چرخند برابر ۰/۴۰ m باشد، بزرگی بیشینهٔ گشتاور نیرویی را که دوچرخه سوار وارد می‌کند تعیین کنید.

حل: $\tau=rF\Rightarrow\tau=rmg\Rightarrow\tau=۰/۴\times۷۰\times۹/۸=۲۷۴/۴\,\text{N}\cdot\text{m}$

۸۶- قرصی با شتاب زاویه‌ای ثابت در مدت ۶/۰۰s از مکان زاویه‌ای $\theta_۱=۱۰/۰\,\text{rad}$ تا مکان زاویه‌ای $\theta_۲=۷۰/۰\,\text{rad}$ می‌چرخد. سرعت زاویه‌ای قرص در $\theta_۲$ برابر ۱۵/۰rad/s است. (الف) سرعت زاویه‌ای آن در $\theta_۱$ چقدر بوده است؟ (ب) شتاب زاویه‌ای آن چقدر است؟ (پ) این قرص در ابتدا در کدام مکان زاویه‌ای ساکن بوده است؟ (ت) θ را برحسب زمان t و تندی زاویه‌ای ω را برحسب t از زمان شروع این حرکت در $t=۰$ برای این قرص رسم کنید.

حل: (الف) از روابط سینماتیک دورانی داریم:

$\Delta\theta=\frac{۱}{۲}(\omega_۱+\omega_۲)t$

$۷۰-۱۰=\frac{۱}{۲}(\omega_۱+۱۵)(۶)\Rightarrow\omega_۱=۵\,\text{rad/s}$

(ب) $\alpha=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{۱۵-۵}{۶}=۱/۶۷\,\text{rad/s}^۲$

(پ) از رابطهٔ مستقل از زمان استفاده می‌کنیم:

$\omega_1^2-\omega_0^2=2\alpha(\theta_1-\theta_0)$

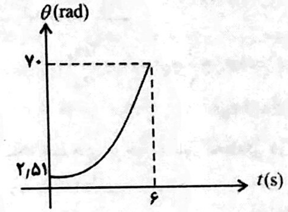
$\omega_1^2=2\alpha(\theta_1-\theta_0)\Rightarrow 10-\theta_0=\frac{25}{2\times1/67}=7/49\,rad$

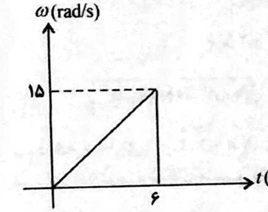
$\Rightarrow\theta_0=+2/51\,rad$

(ت)

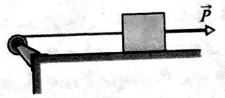
$\theta=\frac{1}{2}\alpha t^2+\theta_0\Rightarrow\theta=\frac{1}{2}\times1/67t^2+\theta_0\Rightarrow\theta=0/835t^2+2/51$

$\omega=\alpha t\Rightarrow\omega=1/67t$



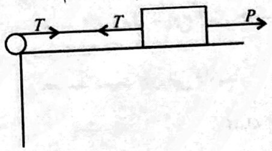


۸۷- چرخی به شعاع ۰/۲ m به محور افقی بدون اصطکاکی متصل است. لختی چرخشی چرخ حول این محور برابر ۰/۰۵۰ kg·m² است. ریسمان بدون جرمی که به دور این چرخ پیچیده شده به جسمی به جرم ۲/۰ kg وصل است. جسم روی سطح افقی بدون اصطکاکی می‌لغزد. اگر نیرویی افقی با بزرگی $P=3/0N$ را مطابق شکل ۱۰-۵۴ به این جسم وارد کنیم، بزرگی شتاب زاویه‌ای چرخ چقدر است؟ فرض کنید ریسمان روی چرخ نمی‌لغزد. SSM



شکل ۱۰-۵۴ مسئلهٔ ۸۷

حل: قانون نیوتن را برای جسم می‌نویسیم:



$P-T=Ma$

T نیروی کشش ریسمان سبب ایجاد گشتاور نیرو می‌شود

$TR=I\alpha$ و $a=R\alpha$

$T=\frac{I\alpha}{R}$

جایگذاری می‌کنیم:

$P-\frac{I\alpha}{R}=MR\alpha\Rightarrow P=\left(\frac{I}{R}+MR\right)\alpha$

$\alpha=\frac{P}{\frac{I}{R}+MR}\Rightarrow\alpha=\frac{3}{\frac{0/05}{0/2}+2\times0/2}=4/61\,rad/s^2$

۸۸- خورشید ما در فاصلهٔ $2/3\times10^4\,ly$ (سال نوری) از مرکز کهکشان راه شیری قرار دارد و روی دایره‌ای حول این مرکز با تندی ۲۵۰km/s حرکت می‌کند. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا خورشید یک دور کامل به دور مرکز کهکشان بچرخد؟ (ب) اگر خورشید در $4/5\times10^9$ سال قبل تشکیل شده باشد، چند دور تاکنون به دور مرکز کهکشان چرخیده است؟

حل: (الف) ابتدا، سال نوری را به فاصله تبدیل می‌کنیم:

$2/3\times10^4\,ly=2/3\times10^4\,(365)(24)(3600)(3\times10^5)$

$=2/18\times10^{17}\,km$

$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow\frac{v}{R}=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi R}{v}$

$T=\frac{2\times3/14\times2/18\times10^{17}\,km}{250\,km/s}=5/5\times10^{15}\,s$

(ب) سن خورشید برابر است با:

$4/5\times10^9\times(365)(24)(3600)=1/42\times10^{17}s$

تعداد دور برابر است با:

$N=\frac{t}{T}=\frac{1/42\times10^{17}}{5/5\times10^{15}}=25/82$

یعنی تقریباً ۲۶ بار.

۸۹- یک صفحهٔ گرامافون با تندی $33\frac{1}{3}$ rev/min می‌چرخد و وقتی موتور خاموش شود حرکت آن کند شده و پس از ۳۰s متوقف می‌شود. (الف) شتاب زاویه‌ای (ثابت) آن را برحسب دور بر مجذور دقیقه به دست آورید. (ب) در این مدت صفحه چند دور چرخیده است؟ SSM

حل: (الف)

$\omega=\frac{100}{3}\frac{rev}{min}$

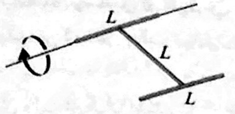
$\alpha=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=-\frac{33/33}{0/5}=-66/67\,rev/min^2$

(ب)

$\omega^2-\omega_0^2=2\alpha\Delta\theta\Rightarrow\Delta\theta=-\frac{\omega_0^2}{2\alpha}$

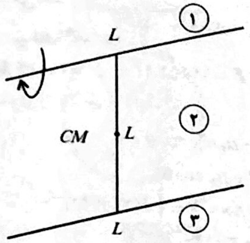
$\Delta\theta=\frac{(33/33)^2}{2\times66/67}=8/33\,rev$

۹۰- جسم صلبی از سه میلهٔ نازک مشابه هر یک به طول $L=0/600m$ تشکیل شده است که به شکل حرف H (شکل ۱۰-۵۵) به هم متصل‌اند. این جسم می‌تواند آزادانه حول یک محور افقی که از یکی از ساقهای حرف H می‌گذرد بچرخد. جسم را رها می‌کنیم تا از حال سکون و از وضعیتی که صفحهٔ H به صورت افقی است سقوط کند. تندی زاویه‌ای جسم در وقتی که صفحهٔ H به حالت قائم قرار می‌گیرد چقدر است؟



شکل ۱۰-۵۵ مسئلهٔ ۹۰

حل: از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. مرکز جرم سیستم در وسط میلهٔ L_2 قرار دارد.
گشتاور لختی حول میلهٔ ۱ را بدست می‌آوریم.



$I_1=0$

$I=I_2+I_3\Rightarrow I=\frac{1}{3}mL^2+mL^2=\frac{4}{3}mL^2$

m جرم هر میله است. جرم کل ۳m است.

$E_1=E_2$

$3mg\frac{L}{2}=\frac{1}{2}I\omega^2$

$\omega^2=\frac{9}{4}\frac{g}{L}$

با جایگذاری بدست می‌آوریم:

$\omega=\sqrt{\frac{9g}{4L}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{9/8}{0/6}}=6/06\,rad/s$

۹۱- (الف) نشان دهید که لختی چرخشی یک استوانهٔ توپر به جرم M و شعاع R حول محور مرکزی آن برابر لختی چرخشی حلقه‌ای به جرم M و شعاع $R/\sqrt{2}$ حول محور مرکزی خود است. (ب) نشان دهید که لختی چرخشی I هر جسم معین به جرم M حول هر محور داده شده برابر است با لختی چرخشی یک *حلقهٔ هم‌ارز* حول آن محور در صورتی که این حلقه دارای همان جرم M و شعاعی برابر k باشد که با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$k=\sqrt{\frac{I}{M}}$$

شعاع k حلقهٔ معادل را *شعاع چرخش* جسم داده شده می‌نامند. SSM

حل: (الف)

$I_{استوانه}=\frac{1}{2}MR^2$

$I_{حلقه}=Mr^2\Rightarrow Mr^2=\frac{1}{2}MR^2\Rightarrow r=\frac{\sqrt{2}}{2}R$

(ب) می‌دانیم I برای یک حلقه Mk^2 است. در اینجا k شعاع حلقه است.

$I=Mk^2\Rightarrow k=\sqrt{\frac{I}{M}}$

۹۲- پوستهٔ کروی نازکی به شعاع ۱/۹۰m را در نظر بگیرید که یک گشتاور نیروی ۹۶۰N·m به آن وارد و باعث ایجاد شتاب زاویه‌ای برابر با $6/2rad/s^2$ حول محوری که از مرکز پوسته می‌گذرد شده است. مطلوب است (الف) لختی چرخشی پوستهٔ کروی حول این محور و (ب) جرم این پوسته.

حل: (الف)

$\tau=I\alpha$

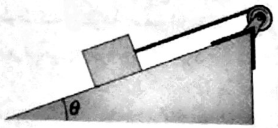
$I=\frac{\tau}{\alpha}\Rightarrow I=\frac{960}{6/2}=154/8\,kg\cdot m^2$

(ب) برای یک پوستهٔ کروی، لختی چرخشی برابر با $\frac{2}{3}mR^2$ است.

$I=\frac{2}{3}mR^2\Rightarrow m=\frac{3I}{2R^2}$

$m=\frac{3\times154/8}{2\times(1/9)^2}=64/3\,kg$

۹۳- در شکل ۱۰-۵۶ چرخی به شعاع ۰/۲۰m روی محوری افقی و بدون اصطکاک قرار گرفته است. ریسمان بدون جرمی به دور این چرخ پیچیده شده است و طرف دیگر آن به یک جعبهٔ ۲/۰kg که روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی می‌لغزد قرار دارد. زاویهٔ سطح شیبدار با افق $\theta=20°$ است. جعبه روی سطح با شتاب $2/0m/s^2$ به طرف پایین حرکت می‌کند. لختی چرخشی چرخ را حول محورش به دست آورید.

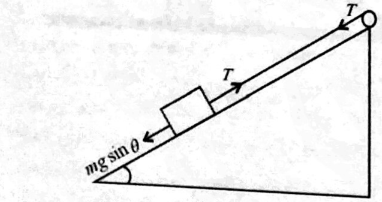


شکل ۱۰-۵۶ مسئلهٔ ۹۳

حل: قانون نیوتن را برای جسم می‌نویسیم:

$mg\sin\theta-T=ma$

$T=m(g\sin\theta-a)$



از طرفی برای قرقره داریم:

$TR=I\alpha$ و $a=R\alpha$

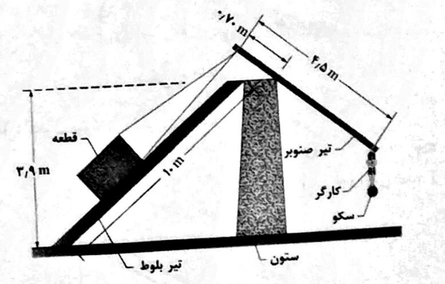
$T=\frac{I\alpha}{R^2}$

جایگذاری می‌کنیم:

$\frac{I\alpha}{R^2}=m(g\sin\theta-a)\Rightarrow I=R^2m\left(\frac{g}{a}\sin\theta-1\right)$

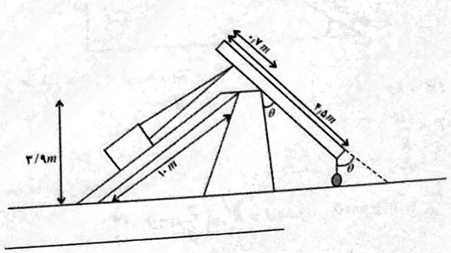
$$I=(0.2)^2\times 2\left(\frac{9.8}{2}\sin(20^\circ)-1\right)=0.054\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

۹۴- روش بالا بردن و قرار دادن سر ستونهای سنگین روی ستونها همواره موضوعی بحث انگیز بوده است. یکی از این روشها در شهر کوچکی از کشور چک[1] مورد آزمایش قرار گرفته است. در این روش قطعه‌ای بتن به جرم ۵۱۲۴ kg روی دو تیر از چوب بلوط که پوست آنها را کنده و با روغن لغزنده کرده بودند بالا کشیده شد (شکل ۱۰-۵۷). هر تیر ۱۰m طول و از زمین تا بالای ستونی که قطعهٔ بتن باید در بالای آن قرار می‌گرفت امتداد داشت. ارتفاع ستونها ۳/۹m و میان قطعه و تیرها ضریب اصطکاک ایستایی برابر ۰/۲۲ بود. نیروی کششی وارد بر قطعه از طریق طنابهایی وارد می‌شد که به دور آن و به دور انتهای بالایی تیری از صنوبر به طول ۴/۵m پیچیده می‌شد. سکویی در انتهای دیگر هر تیر بسته می‌شد. وقتی کارگران بحد کافی روی سکو می‌نشستند یا می‌ایستادند تیر صنوبر حول انتهای بالایی ستون می‌چرخید و قطعه را روی تیر بلوط قدری بالا می‌کشید. طناب متصل به قطعه تقریباً عمود بر تیر صنوبر و فاصلهٔ میان نقطهٔ چرخش و محل پیچیدن طنابها به دور تیر صنوبر ۰/۷۰m بود. فرض کنید که هر کارگر جرمی برابر ۸۵ kg داشته باشد، حداقل تعداد کارگران لازم روی دو سکو باید چقدر باشد تا قطعه شروع به حرکت به سمت بالا در راستای تیر بلوط کند. (تقریباً نصف این تعداد می‌توانند قطعه را از یک طرف و سپس به طرف دیگر حرکت دهند) [redacted]



شکل ۱۰-۵۷ مسئلهٔ ۹۴

حل:



1. Czech

گشتاور نیروی تولید شده توسط وزن کارگران، در انتهای دیگر تیر صنوبر، نیرو تولید می‌کند. در حالت تعادل داریم

τ_1 ، گشتاور نیروی وزن کارگران است.

$$\tau_1=\tau_2$$
$$\tau_1=MgL\sin\theta$$

از روابط مثلثاتی دیده می‌شود که

$$\sin\theta=\frac{3.9}{10}=0.39$$

و $L=4.5-0.7=3.8\,\text{m}$.

$$\tau_1=M\times 9.8\times 0.39\times 3.8=14.52M$$

τ_2 ، گشتاور نیروی بالایی سرستون است که نیروی بالا رونده سرستون را ایجاد می‌کند.

$$r=0.7\,\text{m}$$
$$\tau_2=rF$$
$$\tau_1=\tau_2\Rightarrow 0.7F=14.52M\Rightarrow F=20.74M$$

نیروی F ، سر ستون را بالا می‌برد پس:

$$F-mg\sin\theta-\mu_k mg\cos\theta=0$$
$$F=mg(\sin\theta+\mu_k\cos\theta)$$
$$F=5124\times 9.8\times 0.6=30129.12\,\text{N}$$
$$\Rightarrow 20.74M=30129.12$$
$$M=1506.5\,\text{kg}$$

جرم تمام کارگران برابر با ۱۵۰۶/۵kg است. اگر این وزن را بر ۸۵kg تقسیم کنیم. ۱۷ را بدست می‌آوریم که تعداد کارگر است.

۹۵- شکل ۱۰-۵۸ پرهٔ ملخ هواپیمایی را نشان می‌دهد که با تندی ۲۰۰۰rev/min حول محوری عمودی در نقطهٔ B می‌چرخد. نقطهٔ A در لبهٔ خارجی پره قرار دارد و فاصلهٔ شعاعی آن ۱/۵m است. (الف) اختلاف در بزرگیهای a ، شتاب مرکزگرای نقطهٔ A و نقطه‌ای به فاصلهٔ شعاعی ۰/۱۵m چقدر است؟ (ب) شیب نمودار تغییرات a برحسب فاصلهٔ شعاعی در راستای این پره چقدر است؟

شکل ۱۰-۵۸ مسئلهٔ ۹۵

حل: الف)

$$\omega=2000\frac{rev}{min}=2000\times\frac{2\pi}{60}=209.3\,\text{rad/s}$$
$$a_A=r\omega^2=1.5\times(209.3)^2=6.57\times 10^4\,\text{m/s}^2$$

در فاصلهٔ ۰/۱۵m شتاب برابر است با:

$$a=0.15(209.3)^2=0.657\times 10^4\,\text{m/s}^2$$

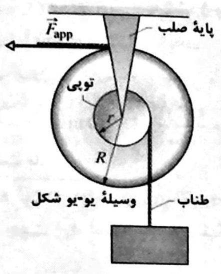
تفاوت شتاب برابر است با:

$$\Delta a=5.91\times 10^4\,\text{m/s}^2$$

(ب)

$$a=r\omega^2\Rightarrow\frac{da}{dr}=\omega^2$$

۹۶- یک وسیلهٔ یو- یو شکل به محوری افقی و بدون اصطکاک وصل شده است که از آن برای بلند کردن یک جعبهٔ ۳۰kg نشان داده شده در شکل ۱۰-۵۹، استفاده می‌شود. شعاع خارجی این وسیله ۰/۵۰m و شعاع r توپی آن ۰/۲۰m است. وقتی نیروی افقی $\vec{F}_{app}$ با بزرگی ۱۴۰N را به طنابی که به دور لبهٔ خارجی این وسیله پیچیده شده است وارد کنیم، جعبه که از یک طناب آویزان است با شتابی به بزرگی ۰/۸۰ m/s² به طرف بالا حرکت می‌کند. لختی چرخشی این وسیله حول محور چرخش آن چقدر است؟



شکل ۱۰-۵۹ مسئلهٔ ۹۶

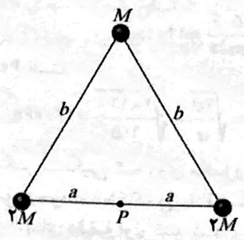
حل: قانون نیوتون را برای حرکت جسم می‌نویسیم. T ، کشش طناب است.

$$T-mg=ma$$
$$T=m(g+a)$$

از طرفی، برای گشتاورها می‌توانیم بنویسیم:

$$F_{app}R-Tr=I\alpha\qquad \alpha=\frac{a}{r}$$
$$F_{app}R-Tr=I\frac{a}{r}\Rightarrow I=\frac{r}{a}(F_{app}R-Tr)$$
$$I=\frac{r}{a}[F_{app}R-m(g+a)r]$$
$$I=\frac{0.2}{0.8}[140\times 0.5-30(9.8+0.8)0.2]=1.6\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

۹۷- جسم صلب نشان داده شده در شکل ۱۰-۶۰ از سه ذره تشکیل شده که به وسیلهٔ میله‌های بدون جرمی به یکدیگر متصل‌اند. این جسم حول محوری عمود به صفحهٔ خود که از نقطهٔ P می‌گذرد می‌چرخد. اگر $M=0.40\,\text{kg}$ ، $a=30\,\text{cm}$ و $b=50\,\text{cm}$ باشد، چه مقدار کار لازم است تا این جسم از حال سکون به تندی ۵/۰rad/s برسد؟



شکل ۱۰-۶۰ مسئلهٔ ۹۷

حل: این مقدار کار، برابر با انرژی جنبشی است.

$$W=k=\frac{1}{2}I\omega^2$$

I را محاسبه می‌کنیم:

$$I=\sum_i m_i r_i^2$$
$$I=2Ma^2+2Ma^2+M(b^2-a^2)=M(3a^2+b^2)$$
$$I=0.4(3(0.3)^2+(0.5)^2)=0.208\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$
$$W=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\times 0.208\times(5)^2=2.6\,\text{J}$$

۹۸- *مهندسی نوشیدنیها.* درهای فشاری یکی از پیشرفتهای مهم در طراحی مهندسی قوطیهای نوشابه است. این در دور یک میلهٔ مرکزی در بالای قوطی می‌چرخد. وقتی انتهای در را به طرف بالا بکشیم انتهای دیگر آن به طرف پایین می‌رود و روی قسمتی از لبهٔ بالایی قوطی که علامتگذاری شده است فشار می‌آورد. اگر نیروی به طرف بالا ۱۰N باشد، بزرگی نیروی وارد بر قسمت علامتگذاری شدهٔ قوطی به طور تقریب چقدر است؟ (برای این کار می‌توانید یک قوطی با چنین دری را امتحان کنید.)

حل: حالتی را در نظر می‌گیریم که گشتاور نیروی برآیند صفر است. پس

$$\tau_1=\tau_2\Rightarrow r_1F_1=r_2F_2\Rightarrow F_2=\frac{r_1}{r_2}F_1$$
$$r_1=2\,\text{cm}\qquad r_2=1\,\text{cm}$$
$$F_2=\frac{2}{1}10\neq 20\,\text{N}$$

۹۹- ناظرانی که با وسیلهٔ نقلیه در کنار یوزپلنگها حرکت کرده‌اند گزارش داده‌اند که یوزپلنگها با تندی اعجاب آور ۱۱۴ km/h (حدود ۷۱mi/h) می‌دوند. فرض کنید می‌خواهید تندی یوزپلنگی را با قرار دادن اتومبیل خود در کنار این حیوان در حالی که تندی سنج اتومبیل عدد ۱۱۴km/h را نشان می‌دهد اندازه بگیرید. اتومبیل خود را در فاصلهٔ ۸/۰m از یوزپلنگ قرار می‌دهید ولی صدای ناشی از اتومبیل باعث می‌شود که یوزپلنگ رفته رفته مسیر خود را تغییر دهد و روی دایره‌ای به شعاع ۹۲ m حرکت کند. بنابراین، شما نیز در طول یک مسیر دایره‌ای به شعاع ۱۰۰m حرکت می‌کنید. (الف) تندی زاویه‌ای شما و یوزپلنگ در طول مسیر چقدر است؟ (ب) تندی خطی یوزپلنگ در طول مسیرش چقدر است؟ (اگر این حرکت دایره‌ای را به حساب نیاورده باشید به اشتباه نتیجه می‌گیرید که تندی یوزپلنگ برابر ۱۱۴ km/h است. از این نوع اشتباهها به وضوح در گزارشها دیده می‌شود.)

حل: (الف) تندی زاویه‌ای شما و یوزپلنگ با هم برابر است. تندی شما ۱۱۴km/h است.

$$v=114\,\text{km/h}=31.67\,\text{m/s}$$

$\omega=\frac{v}{R}=\frac{۳۱/۶۷}{۱۰۰}=۰/۳۱۶۷\,\text{rad/s}$

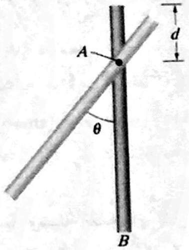
(ب) $v=R\omega=۹۲\times ۰/۳۱۶۷=۲۹/۱۴\,\text{m/s}$

۱۰۰- نقطه‌ای روی لبهٔ چرخ چاقو تیزکنی به قطر $۰/۷۵\,\text{m}$ با آهنگ ثابت تندی خود را در مدت $۶/۲\,\text{s}$ از $۱۲\,\text{m/s}$ به $۲۵\,\text{m/s}$ تغییر می‌دهد. شتاب زاویه‌ای متوسط این چرخ چقدر است؟

حل: $\omega=\frac{v}{R}\Rightarrow \omega_۱=\frac{۱۲}{۰/۳۷۵}=۳۲\,\text{rad/s}$

$\omega_۲=\frac{۲۵}{۰/۳۷۵}=۶۶/۶۶\,\text{rad/s}\Rightarrow \alpha=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=۵/۸\,\text{rad/s}^۲$

۱۰۱- در شکل ۱۰-۶۱ میلهٔ نازک یکنواختی به جرم $۳/۰\,\text{kg}$ و طول $۴/۰\,\text{m}$ آزادانه به دور محور افقی A که عمود بر میله و از نقطه‌ای به فاصلهٔ $d=۱/۰\,\text{m}$ از انتهای میله می‌گذرد، می‌چرخد. انرژی جنبشی میله وقتی از مکان قائم می‌گذرد برابر $۲۰\,\text{J}$ است. (الف) لختی چرخشی میله را حول محور A به دست آورید. (ب) تندی (خطی) انتهای B میله وقتی میله از مکان قائم می‌گذرد چقدر است؟ (پ) در چه زاویهٔ θ میله به طور لحظه‌ای در مسیر حرکتش متوقف می‌شود؟



شکل ۱۰-۶۱ مسئلهٔ ۱۰۱

حل: (الف) از قضیهٔ محورهای موازی استفاده می‌کنیم:

$I=I_{cm}+mh^۲$

$h=۲-۱=۱\,\text{m}$

$I=\frac{۱}{۱۲}mL^۲+m(۱)^۲$

$I=\frac{۱}{۱۲}\times ۳\times ۱۶+۳\times(۱)=۷\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲$

(ب) $k=\frac{۱}{۲}I\omega^۲\Rightarrow \omega^۲=\frac{۲k}{I}\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{۲\times ۲۰}{۷}}=۲/۳۹\,\text{rad/s}$

$v_B=L\omega=(۴-۱)\omega=۳\times ۲/۳۹=۷/۱۷\,\text{m/s}$

(پ) از پایستگی انرژی مکانیکی استفاده می‌کنیم

$E_۱=E_۲$

$mg\,y(۱-\cos\theta)=k$

در اینجا y، فاصلهٔ مرکز جرم تا تکیه‌گاه A است. یعنی

$y=۲-۱=۱\,\text{m}$

$۱-\cos\theta=\frac{k}{mg\,y}\Rightarrow \cos\theta=۱-\frac{k}{mg\,y}$

$\cos\theta=۱-\frac{۲۰}{۳\times ۹/۸\times ۱}=۰/۳۲$

$\theta=\cos^{-۱}(۰/۳۲)=۷۱/۳۵^\circ$

۱۰۲- اتومبیلی از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع $۳۰/۰\,\text{m}$ دور می‌زند. تندی این اتومبیل با آهنگ ثابت $۰/۵۰۰\,\text{m/s}^۲$ افزایش می‌یابد. (الف) بزرگی شتاب خطی *خالص* اتومبیل در $۱۵\,\text{s}$ بعد چقدر خواهد بود؟ (ب) در این زمان زاویهٔ بردار شتاب خالص با سرعت اتومبیل چقدر است؟

حل: (الف)
$v=a_Tt\Rightarrow v=۰/۵\times ۱۵=۷/۵\,\text{m/s}$

شتاب مماسی همان $۰/۵\,\text{m/s}^۲$ است.

شتاب شعاعی برابر است با:

$a_R=\frac{v^۲}{r}\Rightarrow a_R=\frac{(۷۵)^۲}{۳۰}=۱/۸۷۵\,\text{m/s}^۲$

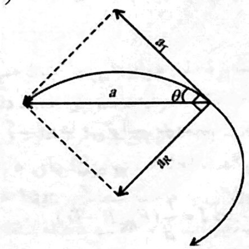
شتاب کل برابر است با:

$a=\sqrt{a_T^۲+a_R^۲}\Rightarrow a=\sqrt{(۰/۵)^۲+(۱/۸۷۵)^۲}=۱/۹۴\,\text{m/s}^۲$

(ب) بردار v، در جهت a_T است. از روی شکل پیداست که:

$\cos\theta=\frac{a_T}{a}$

$\theta=\cos^{-۱}\left(\frac{a_T}{a}\right)$



$\theta=\cos^{-۱}\left[\frac{۰/۵}{۱/۹۴}\right]\Rightarrow \theta=۷۵/۰۶^\circ$

۱۰۳- یک قرقره به قطر $۸/۰\,\text{cm}$ دارای ریسمانی به طول $۵/۶\,\text{m}$ است که به دور محیط آن پیچیده شده است. قرقره با شتاب زاویه‌ای ثابت $۱/۵\,\text{rad/s}^۲$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. (الف) این قرقره چه زاویه‌ای را باید طی کند تا کل ریسمان از روی آن باز شود؟ (ب) این کار چقدر طول می‌کشد؟

(الف) s طول طناب است: R شعاع قرقره است.

$\theta=\frac{s}{R}\Rightarrow \theta=\frac{۵/۶}{۰/۰۴}=۱۴۰\,\text{rad}$

شعاع قرقره $۴\,\text{cm}$ است.

(ب) $\theta=\frac{۱}{۲}\alpha t^۲\Rightarrow t=\sqrt{\frac{۲\theta}{\alpha}}=\sqrt{\frac{۲\times ۱۴۰}{۱/۵}}=۱۳/۶۶\,\text{s}$

۱۰۴- چرخ لنگر سنگینی که روی محور مرکزی خود می‌چرخد به دلیل وجود اصطکاک در یاتاقانهای آن حرکتش کند می‌شود. در انتهای دقیقهٔ اول کند شدن تندی زاویه‌ای $۰/۹۰۰$ برابر تندی زاویه‌ای اولیهٔ آن (برابر $۲۵۰\,\text{rev/min}$) است. با فرض اینکه شتاب زاویه‌ای ثابت باشد، تندی زاویه‌ای را در انتهای دقیقهٔ دوم به دست آورید.

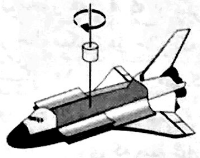
حل: ابتدا شتاب زاویه‌ای را بدست می‌آوریم:

$\alpha=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\Rightarrow \alpha=\frac{۰/۹\omega_۰-\omega_۰}{۱\text{min}}=\frac{-۰/۱\omega_۰}{۱\text{min}}=-۲۵\frac{rev}{(\text{min})^۲}$

تندی زاویه‌ای در انتهای دقیقهٔ دوم برابر است با:

$\omega=at+\omega_۰=-۲۵(۲)+۲۵۰=۲۰۰\frac{rev}{\text{min}}$

۱۰۵- شکل ۱۰-۶۲ یک ماهوارهٔ مخابراتی را نشان می‌دهد که به صورت استوانهٔ توپری به جرم $۱۲۱۰\,\text{kg}$، قطر $۱/۲۱\,\text{m}$ و طول $۱/۷۵\,\text{m}$ است. این ماهواره قبل از پرتاب شدن از شاتل با تندی $۱/۵۲\,\text{rev/s}$ حول محور استوانه می‌چرخد. (الف) لختی چرخشی استوانه حول محور چرخشی و (ب) انرژی جنبشی چرخشی آن چقدر است؟



شکل ۱۰-۶۲ مسئلهٔ ۱۰۵

حل: (الف)
$I=\frac{۱}{۲}mR^۲$

$I=\frac{۱}{۲}\times ۱۲۱۰\times(\frac{۱/۲۱}{۲})^۲=۲۲۱/۴۵\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲$

(ب) $K=\frac{۱}{۲}I\omega^۲\Rightarrow K=\frac{۱}{۲}\times(۲۲۱/۴۵)(۱/۵۲\times ۲\pi)^۲=۱۰۰۹۰\,\text{J}$

۱۰۶- یک صفحهٔ گرامافون روی گرامافونی قرار دارد که با تندی $۳۳\frac{۱}{۳}\,\text{rev/min}$ می‌چرخد. (الف) تندی زاویه‌ای آن را برحسب رادیان بر ثانیه به دست آورید. تندی خطی نقطه‌ای روی صفحه به فاصلهٔ (ب) $۱۵\,\text{cm}$ و (پ) $۷/۴\,\text{cm}$ از محور صفحه چقدر است؟

حل: (الف) $\omega=\frac{۱۰۰}{۳}\times\frac{۲\pi}{۶۰}=۳/۴۹\,\text{rad/s}^۲$

(ب) $v=R\omega\Rightarrow v=۰/۱۵\times ۳/۴۹=۰/۵۲\,\text{m/s}$

(پ) $v=R\omega\Rightarrow v=۰/۰۷۴\times ۳/۴۹=۰/۲۶\,\text{m/s}$

۱۰۷- تندی زاویه‌ای اتومبیلی که با تندی $۵۰\,\text{km/h}$ حرکت می‌کند و در مسیری دایره‌ای به شعاع $۱۱۰\,\text{m}$ دور می‌زند چقدر است؟

حل:
$v=۱۳/۹\,\text{m/s}^۲$

$\omega=\frac{v}{R}=\frac{۱۳/۹}{۱۱۰}=۰/۱۳\,\text{rad/s}$

۱۰۸- مطلوب است تعیین (الف) گشتاور نیرو، (ب) انرژی و (پ) توان متوسط لازم برای شتاب دادن زمین از حال سکون به تندی زاویه‌ای فعلی آن حول محورش در مدت یک روز.

حل: (الف) سرعت زاویه‌ای زمین برابر است با:

$\omega=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{۲۴\times ۳۶۰۰}=۷/۳\times ۱۰^{-۵}\,\text{rad/s}$

گشتاور لختی زمین برابر است با:
$I=\frac{۲}{۵}mR^۲$

$I=\frac{۲}{۵}\times(۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴})(۶/۳۷\times ۱۰^۶)^۲=۹/۷۱\times ۱۰^{۳۷}\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲$

$\alpha=\frac{\omega}{T}\Rightarrow \alpha=\frac{۷/۳\times ۱۰^{-۵}}{۲۴\times ۳۶۰۰}=۸/۴\times ۱۰^{-۱۰}\,\text{rad/s}^۲$

$\tau=I\alpha$

$\tau=(۹/۷۱\times ۱۰^{۳۷}\times ۸/۴\times ۱۰^{-۱۰})=۸/۱۵\times ۱۰^{۲۸}\,\text{N}\cdot\text{m}$

(ب)

$K=\frac{۱}{۲}I\omega^۲=\frac{۱}{۲}(۹/۷۱\times ۱۰^{۲۸})(۷/۳\times ۱۰^{-۵})^۲=۲/۵۸\times ۱۰^{۲۹}\,\text{J}$

(پ) $\overline{P}=\frac{K}{T}=\frac{۲/۲۵\times ۱۰^{۲۹}}{۲۴\times ۳۶۰۰}=۳\times ۱۰^{۲۴}\,\text{w}$

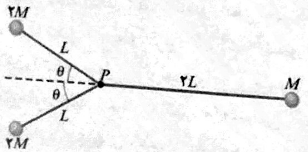
۱۰۹- مولکول اکسیژن $O_۲$ دارای جرم $۵/۳۰\times ۱۰^{-۲۶}\,\text{kg}$ و لختی چرخشی $۱/۹۴\times ۱۰^{-۴۶}\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲$ حول محوری است که از مرکز خط واصل بین اتمها می‌گذرد و بر آن خط عمود است. فرض کنید که مرکز جرم یک مولکول اکسیژن $O_۲$ در گازی دارای تندی انتقالی $۵۰۰\,\text{m/s}$ باشد و مولکول دارای انرژی جنبشی چرخشی برابر $\frac{۲}{۳}$ انرژی جنبشی انتقالی مرکز جرم آن است. آنگاه تندی زاویه‌ای مولکول حول مرکز جرم آن چقدر است؟

حل:
$\frac{۱}{۲}I\omega^۲=\frac{۲}{۳}\frac{۱}{۲}mv^۲\Rightarrow I\omega^۲=\frac{۲}{۳}mv^۲$

$\omega^۲=\frac{۲mv^۲}{۳I}\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{۲m}{۳I}}\,v$

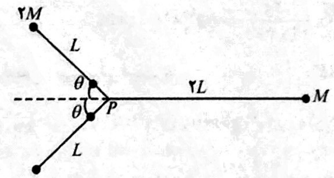
$\omega=\sqrt{\frac{۲\times ۵/۳\times ۱۰^{-۲۶}}{۳\times ۱/۹۴\times ۱۰^{-۲۶}}}\times ۵۰۰=۶/۷۵\times ۱۰^{۱۲}\,\text{rad/s}$

۱۱۰- جسم صلب نشان داده شده در شکل ۱۰-۶۳ شامل سه گلوله و سه میلهٔ رابط است، با $M=۱/۶\,\text{kg}$، $L=۰/۶۰\,\text{m}$ و $\theta=۳۰^\circ$. گلوله‌ها را می‌توان به صورت یک ذره در نظر گرفت ومیله‌های رابط جرم ناچیز دارند. انرژی جنبشی چرخشی این جسم در صورتی که تندی زاویه‌ای آن برابر $۱/۲\,\text{rad/s}$ باشد، (الف) حول محوری که از نقطهٔ P می‌گذرد و عمود بر صفحهٔ شکل است و (ب) حول محوری که از نقطهٔ P می‌گذرد و عمود بر میلهٔ به طول $۲L$ است و در صفحهٔ شکل قرار دارد، چقدر است؟



شکل ۱۰-۶۳ مسئلهٔ ۱۱۰

حل: (الف)



$I=\sum_i m_i r_i^۲$

$I=۲ML^۲+۲ML^۲+M۴L^۲=۸ML^۲$

$I=۸\times ۱/۶\times(۰/۶)^۲=۴/۶\,kg\cdot m^۲$

$k=\frac{۱}{۲}I\omega^۲\Rightarrow k=\frac{۱}{۲}\times ۴/۶\times(۱/۲)^۲=۳/۳۱J$

(ب) در این حالت، جرم‌های ۲M به فاصلهٔ $r=L\cos\theta$ از محور دوران قرار دارند.

$I=۲M(L\cos\theta)^۲+۲M(L\cos\theta)^۲+M(۲L)^۲$

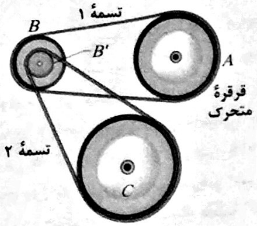
$I=۴ML^۲\cos^۲\theta+۴ML^۲=۴ML^۲(۱+\cos^۲\theta)$

$I=۴ML^۲(۲-\sin^۲\theta)$

$I=۴\times ۱/۶\times(۰/۶)^۲\left(۲-\frac{۱}{۴}\right)=۴/۰۳\,kg\cdot m^۲$

$k=\frac{۱}{۲}I\omega^۲\Rightarrow k=\frac{۱}{۲}\times ۴/۰۳\times(۱/۲)^۲=۲/۹J$

۱۱۱- در شکل ۱۰-۶۴ چهار قرقره توسط دو تسمه به هم متصل شده‌اند. قرقرهٔ A (به شعاع ۱۵ cm) قرقرهٔ متحرک است و با تندی زاویه‌ای ۱۰ rad/s می‌چرخد. قرقرهٔ B (به شعاع ۱۰ cm) توسط تسمهٔ ۱ به قرقرهٔ A متصل شده است. قرقرهٔ B' (به شعاع ۵ cm) هم مرکز با قرقرهٔ B است و محکم به آن متصل شده است. قرقرهٔ C (به شعاع ۲۵ cm) توسط تسمهٔ ۲ به



شکل ۱۰-۶۴ مسئلهٔ ۱۱۱

قرقرهٔ B' متصل شده است. (الف) تندی خطی یک نقطه واقع بر تسمهٔ ۱، (ب) تندی زاویه‌ای قرقرهٔ B، (پ) تندی زاویه‌ای قرقرهٔ B'، (ت) تندی خطی یک نقطه واقع بر تسمهٔ ۲ و (ث) تندی زاویه‌ای قرقرهٔ C را محاسبه کنید. (*راهنمایی*: اگر تسمهٔ بین دو قرقره نلغزد، تندیهای خطی در پیرامون دو قرقره باید یکسان باشد.)

حل: (الف)

$v=R\omega$

$v=۰/۱۵\times ۱۰=۱/۵\,m/s$

(ب)

$v_A=v_B$

$r_A\omega_A=r_B\omega_B$

$\omega_B=\frac{r_A}{r_B}\omega_A\Rightarrow \omega_B=\frac{۰/۱۵}{۰/۱}\times ۱۰=۱۵\,rad/s$

(پ) تندی زاویهٔ B و B' با یکدیگر برابر است.

(ت)

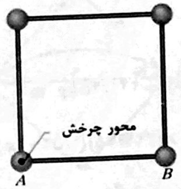
$v_{B'}=r_{B'}\times\omega_{B'}\Rightarrow v_{B'}=۰/۰۵\times ۱۵=۰/۷۵\,m/s$

(ث)

$v_{B'}=v_C\Rightarrow \omega_C=\frac{r_{B'}}{r_C}\omega_{B'}$

$\omega_C=\frac{۰/۰۵}{۰/۲۵}۱۵=۳\,rad/s$

۱۱۲- چهار ذره هر یک به جرم ۰/۲۰kg در چهار رأس مربعی به ضلع ۰/۵m قرار دارند. این ذره‌ها توسط میله‌هایی با جرم ناچیز به هم متصل‌اند. این جسم صلب می‌تواند در صفحه‌ای قائم حول محور افقی A که از یکی از ذره‌ها می‌گذرد بچرخد. جسم را از حال سکون در حالی که میلهٔ AB به صورت افقی است مطابق شکل ۱۰-۶۵، رها می‌کنیم. (الف) لختی چرخشی جسم حول محور A چقدر است؟ (ب) تندی زاویه‌ای جسم حول محور A در لحظه‌ای که میلهٔ AB به حالت قائم در می‌آید چقدر است؟

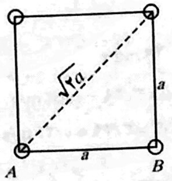


شکل ۱۰-۶۵ مسئلهٔ ۱۱۲

حل: (الف)

$I=\sum_i m_i r_i^۲$

$I=ma^۲+ma^۲+m۲a^۲=۴ma^۲$



$I=۴\times ۰/۲\times(۰/۵)^۲=۰/۲\,kg\cdot m^۲$

(ب) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم. مرکز جرم از $y_۱=\frac{a}{۲}$ به $y_۲=-\frac{a}{۲}$ جابه‌جا می‌شود.

$E_۱=E_۲\Rightarrow mg\frac{a}{۲}=-mg\frac{a}{۲}+\frac{۱}{۲}I\omega^۲$

$\frac{۱}{۲}I\omega^۲=mga\Rightarrow \omega^۲=\frac{۲mga}{I}$

در اینجا، m، جرم کل است.

$\omega=\sqrt{\frac{۲\times ۴\times ۰/۲\times ۹/۸\times ۰/۵}{۰/۲}}=۶/۲۶\,m/s$

۱۱۳- صفحهٔ یک گرامافون دارای تندی زاویه‌ای ۸/۰rad/s در لحظه‌ای است که آن را خاموش می‌کنیم. سه ثانیه بعد این صفحه به تندی زاویه‌ای ۲/۶ rad/s می‌رسد. این صفحه از لحظهٔ خاموش شدن چند رادیان می‌چرخد تا متوقف شود؟ (α را ثابت فرض کنید.)

حل: ابتدا، شتاب زاویه‌ای را می‌یابیم.

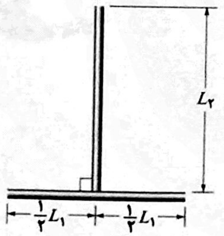
$\alpha=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\Rightarrow \alpha=\frac{۲/۶-۸}{۳}=-۱/۸\,rad/s^۲$

از رابطهٔ مستقل از زمان استفاده می‌کنیم:

$\omega^۲-\omega_۰^۲=۲\alpha\Delta\theta\Rightarrow \Delta\theta=-\frac{\omega_۰^۲}{۲\alpha}$

$\Delta\theta=-\frac{۶۴}{-۲\times ۱/۸}=۱۷/۷۸\,rad$

۱۱۴- دو میلهٔ نازک (هر یک به جرم ۰/۲۰kg) به ترتیب شکل ۱۰-۶۶ به یکدیگر متصل‌اند به طوری که یک جسم صلب را تشکیل می‌دهند. یکی از میله‌ها دارای طول $L_۱=۰/۴۰m$ و طول دیگری برابر $L_۲=۰/۵m$ است. لختی چرخشی این جسم صلب را حول (الف) محوری که عمود بر صفحه کاغذ است و از مرکز میلهٔ کوچکتر می‌گذرد و (ب) محوری که عمود بر صفحه است و از مرکز میلهٔ بزرگتر می‌گذرد، به دست آورید.



شکل ۱۰-۶۶ مسئلهٔ ۱۱۴

حل: (الف)

$I=I_۱+I_۲$

$I=\frac{۱}{۱۲}mL_۱^۲+\frac{۱}{۳}mL_۲^۲$

$I=\frac{۱}{۱۲}\times ۰/۲\times(۰/۴)^۲+\frac{۱}{۳}\times ۰/۲\times(۰/۳)^۲=۰/۰۱۹\,kg\cdot m^۲$

(ب) برای میلهٔ $L_۱$، از قضیهٔ محورهای موازی استفاده می‌کنیم.

$I=\frac{۱}{۱۲}mL_۱^۲+m\left(\frac{L_۲}{۲}\right)^۲+\frac{۱}{۱۲}mL_۲^۲$

$I=\frac{۱}{۱۲}\times ۰/۲\times(۰/۴)^۲+۰/۲\times(۰/۲۵)^۲+\frac{۱}{۱۲}۰/۲\times(۰/۵)^۲$

$=۰/۰۱۹\,kg\cdot m^۲$

۱۱۵- در شکل ۱۰-۱۸ الف قرصی به شعاع ۰/۲۰m به یک محور افقی بدون اصطکاک متصل شده است. لختی چرخشی قرص حول این محور برابر ۰/۴۰ kg/m² است. ریسمان بدون جرمی که به دور محیط قرص پیچیده شده به یک جعبهٔ ۶/۰kg متصل است. دستگاه از حال سکون رها می‌شود. وقتی انرژی جنبشی جعبه ۶/۰J است (الف) انرژی جنبشی چرخشی قرص و (ب) مسافتی که جعبه به پایین حرکت می‌کند، چقدر است؟ SSM

حل: (الف) با کمک انرژی جنبشی، تندی جعبه را می‌یابیم.

$k=\frac{۱}{۲}mv^۲$

$v=\sqrt{\frac{۲\times ۶}{۶}}=۱/۴\,m/s$

تندی زاویه‌ای قرص برابر است با:

$\omega=\frac{v}{R}=\frac{۱/۴}{۰/۲}=۷\,rad/s$

انرژی جنبشی چرخشی برابر است با:

$K=\frac{۱}{۲}I\omega^۲=\frac{۱}{۲}\times ۰/۴\times ۴۹=۹/۸J$

(ب) از پایستگی انرژی استفاده می‌کنیم.

$E_۱=E_۲$

$mgh=\frac{۱}{۲}I\omega^۲+\frac{۱}{۲}mv^۲$

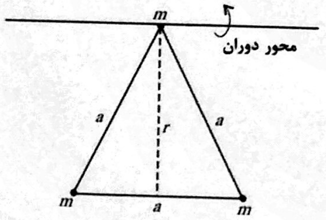
$h=\frac{۶+۹/۸}{۶\times ۹/۸}=۰/۲۷m$

۱۱۶- سه ذرهٔ ۰/۵kg مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۰/۶۰m را تشکیل داده‌اند. این ذره‌ها توسط میله‌هایی با جرم ناچیز به هم متصل‌اند. لختی چرخشی این جسم صلب حول (الف) محوری که از میان یکی از ذره‌ها می‌گذرد و موازی با میلهٔ رابط دو ذرهٔ دیگر است، (ب) محوری که از مرکز یکی از اضلاع می‌گذرد و عمود بر صفحهٔ مثلث است و (پ) محوری که موازی با یکی از اضلاع مثلث است و از نقطهٔ میانی دو ضلع دیگر می‌گذرد، چقدر است؟

حل: (الف)

$I=\sum_i m_i r_i^۲$

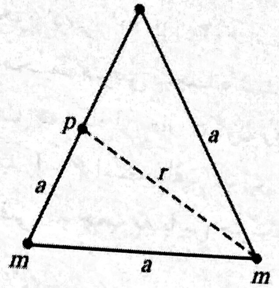
$r^۲=a^۲-\frac{a^۲}{۴}=\frac{۳}{۴}a^۲$



$I=mr^۲+mr^۲=۲mr^۲$

$I=۲\times\frac{۳}{۴}ma^۲=\frac{۳}{۲}\times ۰/۵\times(۰/۶)^۲=۰/۲۷\,kg\cdot m^۲$

(ب) حول نقطهٔ P می‌چرخد.



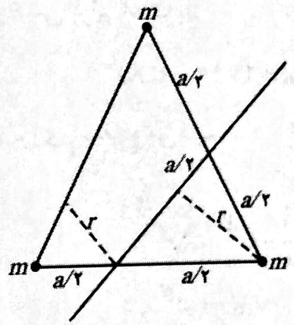
$$r^{۲} = \frac{۳}{۴}a^{۲}$$

$$I = m\frac{a^{۲}}{۴} + m\frac{a^{۲}}{۴} + m^{۳}\frac{a^{۲}}{۴} = \frac{۵}{۴}ma^{۲}$$

$$I = \frac{۵}{۴} \times ۰/۵ \times (۰/۶)^{۲} = ۰/۲۲۵ \text{ kg} \cdot \text{m}^{۲}$$

(پ)

$$r^{۲} = \frac{a^{۲}}{۴} - \frac{a^{۲}}{۱۶} = \frac{۳}{۱۶}a^{۲}$$



فاصلهٔ هر سه ذره از محور دوران r است.

$$I = mr^{۲} + mr^{۲} + mr^{۲} \Rightarrow I = ۳mr^{۲} = ۳m\frac{۳}{۱۶}a^{۴}$$

$$I = \frac{۹}{۱۶}ma^{۲}$$

$$I = \frac{۹}{۱۶} \times ۰/۵(۰/۶)^{۲} = ۰/۱ \text{ kg} \cdot \text{m}^{۲}$$